Lösningsförslag: Reglerteknik AK Tentamen 2015–01–09

Uppgift 1a

Vi har följande samband mellan in- och utsignal:

$$\frac{d}{dt}y(t) = u(t), \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$$

Svar: $A = 1$, $\omega = 1$ rad/s och $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad

Uppgift 1b

Vi har

$$|G_o(i\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega^2+1}}, \quad |G_o(i\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \omega_c = 1, \quad \arg G_o(i\omega_c) = -\arg(i+1) = -45^\circ$$

Svar: Skärfrekvens $\omega_c = 1$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m = 145^\circ$.

Uppgift 1c

Vi har följande samband mellan styrsignalen och reglerfelet

$$U(s) = F(s)E(s) = \frac{s+3}{s+9}E(s) \Leftrightarrow (s+9)U(s) = (s+3)E(s) \Leftrightarrow \dot{u}(t) + 9u(t) = \dot{e}(t) + 3e(t)$$

Vi approximerar derivatorna med Euler bakåt

$$\dot{u}(t) \approx \frac{1}{T}(u(t) - u(t-T)) = 10u(t) - 10u(t-0.1)$$

Detta ger

$$19u(t) = 10u(t-0.1) + 13e(t) - 10e(t-0.1)$$

$$\textbf{Svar:} \quad u(t) = \frac{10}{19}u(t-0.1) + \frac{13}{19}e(t) - \frac{10}{19}e(t-0.1)$$

Uppgift 1d

Regulatorn kan skrivas som

$$F(s) = K\frac{s+1}{s} \quad \Rightarrow \quad G_c(s) = \frac{K(s+1)}{(s+1)(s+1)s+K)}$$

Slutna systemets poler ges av $(s+1)((s+1)s+K)$ (observera att polen i -1 kan förkortas i $G_c(s)$) Vill ha poler i $s = -1, -0,5, -0,5$, dvs polerna ska ges av ekvationen $(s+1)(s+0.5)^2 = (s+1)(s^2+s+0.25)$ Identifiering av termer ger
Svar: $K = 0.25$

Uppgift 2

Det slutna systemts poler ges av

$$s^2(s+1) + K(s+b) = s^2(s+1) + Ks + bK$$

Observera att vi skall rita rotort map på b. Vi får $P(s) = s^2(s+1) + Ks$ och $Q = K$, dvs

- Tre startpunkter som ges av $0, -0.5 \pm \sqrt{0.25 - K}$. Vi kommer ha två olika fall Fall i) $0 < K < 0.25$ (reella startpunkter) och Fall ii.) $K \geq 0.25$ (två komplexa startpunkter) Ändpunkter saknas.
- Asymptoter: 3 stycken med riktingar $\pm\pi/3$, π och skärningspunkt:

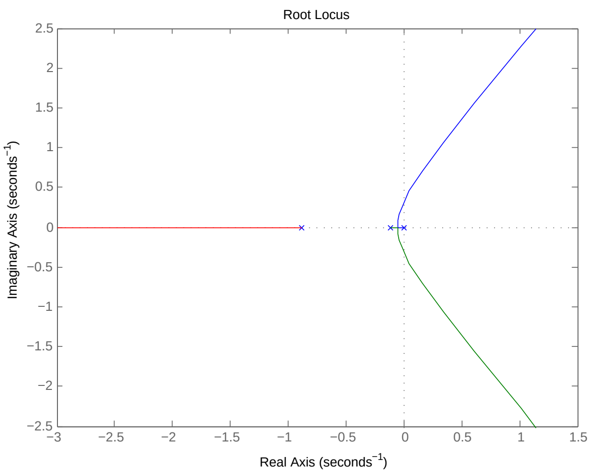
$$\frac{1}{3}[0 - 0.5 + \sqrt{0.25 - K} - 0.5 - \sqrt{0.25 - K}] = \frac{-1}{3}$$

- Reella axeln: Fall i) $[-\infty, 0.5 - \sqrt{0.25 - K}]$, $[0.5 + \sqrt{0.25 - K}, 0]$: Fall ii.) $[-\infty, 0]$
- Imaginarära axeln: $s = i\omega \Rightarrow$

$$i[-\omega^3 + K\omega] + [-\omega^2 + Kb] = 0$$

Vi får då $\omega = 0, K = 0$ samt $\omega^2 = K$ och $\omega^2 = Kb$ med lösning $b = 1$ och $\omega = \pm\sqrt{K}$. Observera att b dessutom ger en pol i -1.

Figuren nedan ger rotorten för de två intressanta fall. För $0 < b < 2$ så ligger rotorten hela tiden i vänster halvplan och det återkopplade systemet är stabilt för all värden på $K > 0$. Det återkopplade systemet blir blir dock mycket oscillativt ifall b väljs nära 1, och långsamt ifall b väljs litet. I fallet $b > 1$ så är det återkopplade systemet instabilt för alla värden på K.



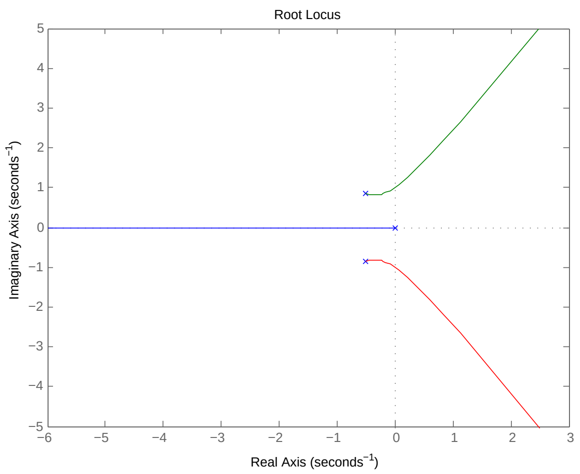


Figure 1: Uppgift 2: Rotorter med $K = 0.1$ resp $K = 1$

Uppgift 3a

Från bodediagrammet läser vi att, vid $\omega_{c,d} = 0.3$ rad/s, är fasmarginalen 20 grader. Detta innebär att vi måste fasavancera 45 grader för att få önskad fasmarginal
Från Fig. [5.13] sid. 106 (Glad, Ljung) ser vi att vi får 45 graders fasavancering (som krävs för att $\varphi_m = 65$) om leadlänken har $\beta = 0.18$. Vi vill få fasavancering vid $\omega_{c,d} = 0.3$, så:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 7.9. \tag{1}$$

Vi måste sänka absolutbeloppet med 20 dB, så att $\omega_c = \omega_{c,d}$. Detta motsvarar en förstärkning vid $\omega_{c,d}$ i regulatorn enligt ekv. 5.6 sid. 106 (ibidem):

$$\frac{K}{\sqrt{\beta}} = 10^{-20/20} \quad \rightarrow \quad K = 0.1\sqrt{\beta} \approx 0.04. \tag{2}$$

Svar:

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D + 1}, \quad K = 0.04,\ \tau_D = 7.9,\ \beta = 0.18 \tag{3}$$

Uppgift 3b

Överföringsfunktioen från insignalstörning till reglerfel ges av

$$\frac{-G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

Vi noterar från Bodediagramet att $G(s)$ innehåller en integrator och att därför det stationära felet ges av (stabilt återkopplat system)

$$\lim_{s\to 0} \frac{-G(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{-1}{F(0)} = \frac{-1}{K} = -25$$

För att helt eliminera felet krävs en lag-länk med $\gamma = 0$ (eftersom $F(0) = \infty$ ger fel noll) och $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 33$

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s}, \quad K = 0.04,\ \tau_D = 7.9,\ \beta = 0.18, \tau_I = 33 \tag{4}$$

Uppgift 4a

Ta fram en tillståndsbeskrivning för systemet i Figur 3, med tillstånden $x_1(t)$ och $x_2(t)$, insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$.
Vi får för överföringsfunktionen från u till x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{X_1(s)}{Z(s)} &= \frac{1}{1+s} \\
X_1(s)(s+1) &= Z(s) \\
sX_1(s) + X_1(s) &= Z(s) \\
\dot{x}_1(t) + x_1(t) &= z(t) \\
\dot{x}_1(t) &= z(t) - x_1(t) \\
\dot{x}_1(t) &= [u(t) + u^3(t)] - x_1(t)
\end{aligned}$$

Likadant för överföringsfunktionen från z till x_2:
Svar: Vi får tillståndsekvationen

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}[u(t) + u^3(t)]$$

$$y = x_1 + x_2$$

Uppgift 4b

Ta fram en linjärisad tillståndsbeskrivning för systemet in Figur 3, med tillstånden $x_1(t)$ och $x_2(t)$, insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$.
Först ska vi beräkna det stationära tillståndet $x_{1,0}, x_{2,0}$ för en konstant insignal $u(t) = u_0$. Vi sätter $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u_0 + u_0^3]$$

som ger

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= [u_0 + u_0^3] \\ x_{2,0} &= [u_0 + u_0^3] \\ y_0 &= 2[u_0 + u_0^3] \end{aligned}$$

Tillståndsekvationerna är redan linjära förutom insignalbidraget $z(t) = u(t) + u^3(t) \approx [u_0 + u_0^3] + [1 + 3u_o^2][u(t) - u_0]$
Svar: Det linjäriserade systemet är

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 + 3u_o^2]\Delta u \\ \Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

där $\Delta u = u - u_0$, $\Delta x_1 = x_1 - [u_0 + u_0^3]$, $\Delta x_2 = x_1 - [u_0 + u_0^3]$, $\Delta y = y - 2[u_0 + u_0^3]$. Sätt $u_o = 2$ för att få efterfrågat svar.

Uppgift 4c

Vi vill konstruera en observatör för fallet $u = 0$ Var kan det observatörens poler poler placeras?
De ges av egenvärdena till $A - KC$, dvs

$$\det \begin{bmatrix} s + 1 + k_1 & k_1 \\ k_2 & s + 1 + k_2 \end{bmatrix} = (s + 1)(s + 1 + k_1 + k_2)$$

Svar: En observatörspol ligger i -1 oberoende av k_1, k_2 och den andra kan vi placera fritt på den reella axeln.

Uppgift 4d

Vi beräknar observatörsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

som har rank 1, dvs systemt är inte observerbart.
Svar: Svar nej

Uppgift 5a

Ur figur fås

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GF}{1+GF} & \frac{G}{1+GF} \\ \frac{F}{1+GF} & \frac{1}{1+GF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix}$$

Nu är

$$1 + GF = \frac{G}{Q}$$

och

$$\begin{bmatrix} \frac{GF}{1+GF} & \frac{G}{1+GF} \\ \frac{F}{1+GF} & \frac{1}{1+GF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{Q}{G} & Q \\ \frac{1}{G}[1 - \frac{Q}{G}] & \frac{Q}{G} \end{bmatrix}$$

Alla dessa fyra överföringsfsfuktioner är stabila eftersom polerna till Q och $1/G$ enligt antaganden är alla stabila (strikt i V.H.P.)!

Uppgift 5b

Här blir

$$F(s) = s + 1 - s - \frac{-3s+1}{s+1} = 1 - \frac{-3s+1}{s+1} \to 1 - 3 = -2, \quad s \to \infty$$

Uppgift 5c

Ansätt

$$\frac{1}{G(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{C(s)}$$

Där $A(s)$ är ett polynom av ordning $n - m$, samt $B(s$ och $C(s)$ är polynom av ordning m så att

$$\frac{B(s)}{C(s)}$$

har ändligt gränsvärde när $s \to \infty$. En sådan uppdelning kan alltid göras med hjälp av så kallade polynomdivisionsalgoritmen, där $A(s)$ kallas kvotpolynom och $B(s)$ kallas restpolynom. Vi tar sedan

$$\frac{1}{Q(s)} = A(s) + \frac{D(s}{E(s)} \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \frac{E(s)}{A(s)E(s) + D(s)}$$

så att rötterna till $A(s)E(s) + D(s)$ ligger i V.H.P och

$$\frac{D(s)}{E(s)}$$

har ändligt gräsvärde när $s \to \infty$. Då gäller att

$$F(s) = \frac{1}{Q(s)} - \frac{1}{G(s)}$$

har ändligt gräsvärde när $s \to \infty$.