Lösningsförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2) den 13 januari 2015 kl 14:00 - 19:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) a) Låt V vara delrummet av $C([0,1])$ som består av alla linjärkombinationer av $u_1(x) = 1$ och $u_2(x) = \sqrt{x}$. Bestäm en ortogonal bas för V med avseende på den inre produkten **(1p)**

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

b) För vilka värden på konstanterna a och b blir integralen

$$\int_0^1 |a + b\sqrt{x} - x|^2 dx$$

så liten som möjligt? **(3p)**

Lösning: a) Vi använder Gram-Schmidt för att få en ortogonal bas. Låt $v_1 = u_1 = 1$ och

$$v_2(x) = u_2(x) - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \sqrt{x} - \int_0^1 \sqrt{x}dx = \sqrt{x} - 2/3.$$

Då är v_1 och v_2 en ortogonal bas för V.

b) Vi vet (Sats 5.3 på sidan 110) att integralen minimeras då $a + b\sqrt{x}$ är den ortogonala projektionen $P(u)$ av vektorn $u(x) = x$ på V. Vi har (se sid 113)

$$P(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2$$

Eftersom

$$\langle u, v_1\rangle = \int_0^1 xdx = 1/2, \quad \|v_1\|^2 = \int_0^1 dx = 1$$

och

$$\langle u, v_2\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{x} - 2/3)dx = 1/15, \quad \|v_2\|^2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2/3)^2 dx = 1/18$$

fås

$$P(u) = \frac{1}{2} + \frac{18}{15}v_2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{5}(\sqrt{x} - 2/3) = \frac{1}{2} + \frac{6\sqrt{x}}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{10} + \frac{6\sqrt{x}}{5}.$$

Alltså, vi ska välja

$$a = -\frac{3}{10}, \quad b = \frac{6}{5}.$$

(2) Bestäm a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, om $a_0 = 0$ och

$$a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{n-k} = 1, \quad n \geq 0.$$

Lösning: Vi Z-transformerar ekvationen (notera att vi har en faltning i VL):

$$zA(z) - \frac{z}{z-2}A(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Vi löser ut $A(z)$:

$$A(z) = \frac{z-2}{(z-3)(z-1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$A(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-3)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}.$$

Inverstransform (t ex formel $z11$ i Beta) ger slutligen att

$$a_n = \frac{1}{2}3^{n-1} + \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

(3) Bestäm en 2π-periodisk reell funktion $f(t)$ som uppfyller

$$f(t + \pi/4) - f(t) = 2\cos t.$$

(Tips: tänk på Eulers formler.)

Lösning: Vi söker lösningar på formen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

(det räcker faktiskt att ha en ändlig summa ovan, vilket vi kommer att se; så blir det inga konvergensproblem). Eftersom $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$, får vi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t+\pi/4)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = e^{it} + e^{-it}.$$

VL kan skrivas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{in\pi/4}-1)e^{int},$$

så vi får relationen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e^{in\pi/4}-1)e^{int} = e^{it}+e^{-it}.$$

Detta är uppfyllt om vi väljer c_n så att

$$c_{-1}(e^{-i\pi/4}-1)=1, \quad c_1(e^{i\pi/4}-1)=1$$

och $c_n = 0$ för alla $n \neq \pm 1$ (notera att c_0 kan väljas helt fritt).

Alltså

$$f(t) = \frac{1}{e^{-i\pi/4}-1}e^{-it} + \frac{1}{e^{i\pi/4}-1}e^{it}$$

uppfyller ekvationen. Notera att detta f faktiskt är reellt:

$$\frac{1}{e^{-i\pi/4}-1}e^{-it} + \frac{1}{e^{i\pi/4}-1}e^{it} = \frac{(e^{i\pi/4}-1)e^{-it}+(e^{-i\pi/4}-1)e^{it}}{(e^{-i\pi/4}-1)(e^{i\pi/4}-1)} =$$
$$= \frac{e^{-i(t-\pi/4)}-e^{-it}+e^{i(t-\pi/4)}-e^{it}}{1-e^{-i\pi/4}-e^{i\pi/4}+1} = \frac{2\cos(t-\pi/4)-2\cos t}{2-2\cos(\pi/4)}.$$

Alltså,

$$f(t) = \frac{2\cos(t-\pi/4)-2\cos t}{2-2\cos(\pi/4)} = \frac{2\cos(t-\pi/4)-2\cos t}{2-\sqrt{2}}$$

är en reell lösning till ekvationen.

(4) a) Låt $f(t) = \sin|t|$. Beräkna f' and f'' i distributionsmening. **(2p)**

b) Definiera $\delta \in \mathcal{S}'$ genom $\delta[\varphi] = \varphi(0)$, och låt $g(x) = -x$. Använd derivatans detinition, samt definitionen av produkt, för att visa att $g\delta' = \delta$. **(2p)**

Lösning: a) Vi använder Heavisidefunktionen $H(t)$ (vars derivata är $\delta(t)$) för att skriva:

$$f(t) = \sin|t| = \sin(-t)(1-H(t)) + \sin(t)H(t).$$

Derivering ger nu

$$f'(t) = -\cos(-t)(1-H(t)) + \sin(-t)(-\delta(t)) + \cos(t)H(t) + \sin(t)\delta(t) =$$
$$= -\cos(-t)(1-H(t)) + \cos(t)H(t)$$

eftersom $\sin(-t)(-\delta(t)) = \sin(t)\delta(t) = \sin(0) = 0$ (se exempel ...). Ytterligare derivering ger nu

$$f''(t) = -\sin(-t)(1-H(t)) - \cos(-t)(-\delta(t)) - \sin(t)H(t) + \cos(t)\delta(t) =$$
$$= -\sin|t| + 2\delta(t)$$

eftersom $\cos(t)\delta(t) = \cos(-t)\delta(t) = \cos(0) = 1$.

b) Enligt definition är $\delta'[\varphi] = -\delta[\varphi'] = -\varphi'(0)$. Definitionen av multiplikationen ger nu:

$$g\delta'[\varphi] = \delta'[g\varphi] = -(g'(0)\varphi(0) + g(0)\varphi'(0)) = \varphi(0).$$

Således är $g\delta' = \delta$.

(5) Låt

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$$

a) Använd Fouriertransformens definition för att bestämma $\widehat{f}(\omega)$. Förkorta svaret så långt som möjligt. **(2p)**

b) För varje värde på $t \in \mathbb{R}$, bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$. **(1p)**

c) Använd resultatet från a) för att beräkna **(1p)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{(x^2-1)^2} dx.$$

Lösning: a) Enligt definition har vi

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Eftersom $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ får vi

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(\omega-1)}dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(\omega+1)}dt\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{-it(\omega-1)}}{-i(\omega-1)}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{e^{-it(\omega+1)}}{-i(\omega+1)}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

vilket efter förenkling ger

$$\widehat{f}(\omega) = 2i\frac{\sin \pi\omega}{\omega^2-1}.$$

b) Vi använder oss av inversformeln (Sats 7.5, sid 171). Vi noterar att f är kontinuerlig, och att höger- och vänsterderivatorna existerar i varje punkt. Vi får att för varje $t \in \mathbb{R}$ gäller

$$f(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Således,

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = 2\pi f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Här använder vi Plancherels formel; nämligen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi.$$

Resultatet i a) ger att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2^2 \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega$$

Alltså har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega = \frac{\pi^2}{2}.$$

(6) Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$ vara sådan att f' är kontinuerlig och $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Bestäm en funktion g som uppfyller

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{y-t} g(y) dy + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning: Vi noterar först att

$$\int_{-\infty}^{t} e^{y-t} g(y) dy = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-y)} g(y) dy.$$

Om vi låter

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

kan vi skriva

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-y)} g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-y) g(y) dy$$

(notera att $h(t-y) = 0$ för $y > t$). Således, vi kan skriva integralekvationen som

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-y) g(y) dy + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi Fouriertransformerar:

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{h}(\omega)\widehat{g}(\omega) + i\omega\widehat{f}(\omega).$$

Enligt F30 i Beta har vi

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}.$$

Löser vi ut $\widehat{g}(\omega)$ fås

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{i\omega\widehat{f}(\omega)}{1-\widehat{h}(\omega)} = \frac{(1+i\omega)i\omega\widehat{f}(\omega)}{i\omega} = i\omega\widehat{f}(\omega) + \widehat{f}(\omega).$$

Inverstransform ger nu att

$$g(t) = f'(t) + f(t).$$

(7) Centralt för Strum-Liouville-problem är att man har att göra med symmetriska operatorer. Låt V vara ett inre produktrum, och antag att $A : V \to V$ är en symmetrisk operator.

a) Visa att om λ är ett egenvärde till operatorn A så måste λ vara reellt. **(2p)**

b) Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala. **(2p)**

Lösning: Se bevis av Lemma 6.1 på sidan 155 i Vretblad.

(8) a) Antag att $f \in C^2(\mathbb{T})$ (f är 2π-periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar). Låt c_n beteckna f:s (komplexa) Fourierkoefficienter. Visa att det finns en konstant $M > 0$ sådan att

$$|c_n| \leq \frac{M}{|n|^2} \text{ för alla } n \neq 0.$$

Visa också att $n^2 c_n \to 0$ då $n \to \pm\infty$. **(2p)**

b) Bestäm alla $f \in C(\mathbb{T})$ som uppfyller $f(2t) = f(t)$ för alla t. **(2p)**

Lösning: a) Se bevis av Sats 4.4 på sidorna 84-85 i Vretblad. Enligt formeln på sidan 84 får vi (partiell integration två gånger, utnyttjande att f, f' är 2π-periodiska)

$$(in)^2 c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-int}dt.$$

Eftersom $f''(t)$ är kontinuerlig (enligt antagande) så

$$|n^2 c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)|dt = M.$$

Vidare, från Riemann-Lebegues lemma följer att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)e^{-int}dt \to 0 \quad \text{då } n \to \pm\infty.$$

Således, $|n^2 c_n| \to 0$ då $n \to \pm\infty$.

b) Vi antar att $f \in C(\mathbb{T})$ och att f uppfyller $f(t) = f(2t)$ för alla t. Låt c_n beteckna f:s Fourierkoefficienter, dvs

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Genom att utnyttja att $f(t) = f(2t)$ får vi

$$c_{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i2nt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(2t)e^{-i2nt}dt.$$

Gör vi nu variabelbytet $s = 2t$ får vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(2t)e^{-i2nt}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(s)e^{-ins}ds.$$

Eftersom $f(s)e^{-ins}$ är 2π-periodisk (och vi integrerar över två perioder), får vi

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(s)e^{-ins}ds = 2\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds = c_n.$$

Således, vi har att

$$c_{2n} = c_n \text{ för alla } n.$$

Om $c_m \neq 0$ för något $m \neq 0$ så skulle vi ha

$$c_{2^k m} = c_m$$

för alla $k \geq 0$. Men eftersom $2^k|m| \to \infty$ då $k \to \infty$ så skulle vi då ha $c_n \not\to 0$ då $n \to \infty$ eller då $n \to \infty$. Detta motsäger Riemann-Lebesgues lemma. Vi drar slutsatsen att vi måste ha $c_n = 0$ för alla $n \neq 0$. Detta medför att f är en konstant. Och det är klart att om $f(t)$ är konstant, så uppfyller f villkoret $f(t) = f(2t)$. Följdaktligen är det precis konstanta f som uppfyller relationen.