KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Lösningsförslag till tentamen 2015-01-12

DEL A

1. Låt $f(x) = xe^{1/x}$.
   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Beräkna de fyra gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)$
   C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
   D. Skissa med hjälp av ovanstående kurvan $y = f(x)$

Lösning. A. Definitionsmängden består av alla reella tal x för vilka $xe^{1/x}$ är definierat, dvs alla $x \neq 0$.

B. Alla dessa gränsvärden är standardgränsvärden. Vi får

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

C. Vi deriverar och får

$$f'(x) = e^{1/x} + xe^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

som existerar för alla $x \neq 0$ och är 0 om och endast om $x = 1$. Ett teckestudium av derivatan ger

Om $x < 0$ så är $f'(x) > 0$. Det följer att f är strängt växande här. Det finns alltså inga lokala extrempunkter på intervallet $x < 0$.

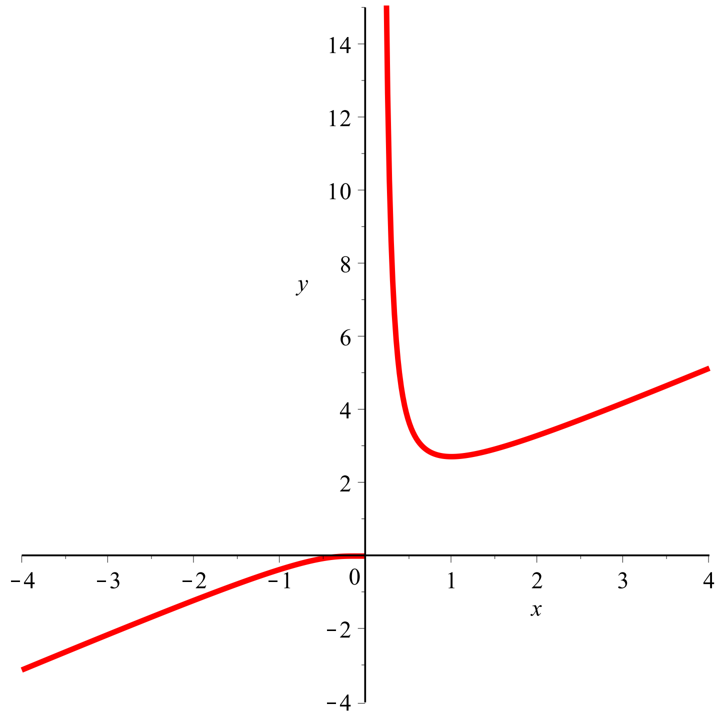
Om $0 < x < 1$ så är $f'(x) < 0$. Det följer att f är strängt avtagande här.

Om $x = 1$ så är $f'(x) = 0$.

Om $x > 1$ så är $f'(x) > 0$. Det följer att f är strängt växande här.

Av ovanstående följer att f har exakt en lokal extrempunkt, närmare bestämt en lokal minpunkt i $x = 1$. Värdet i minpunkten är $f(1) = e$.

D. Nu kan vi rita kurvan:



□

Svar: Se lösningen.

2. Beräkna integralen

$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$$

genom att göra följande:
A. Skriv om integralen med hjälp av substitutionen $\sqrt{x} = t$ (glöm inte gränserna).
B. Beräkna, med hjälp av partiell integration, integralen du fått fram i uppgift A .

Lösning. A. Vi använder substitutionen $\sqrt{x} = t$, eller $x = t^2$, med $dx = 2t\,dt$ och nya gränser $\pi/2$ och π, och får

$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2t\cos t\,dt.$$

B. Vi beräknar integralen från uppgift A med hjälp av partiell integration och får

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 2t\cos t\,dt = [2t\sin t]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} 2\sin t = -\pi - 2.$$

□

Svar: A. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2t\cos t\,dt$.
B. $-\pi - 2$

3. En plåtburk som rymmer 1 liter ska tillverkas i form av en cylinder med botten och lock. Bestäm höjden och bottenytans radie så att materialåtgången blir så liten som möjligt.

Lösning. Låt r vara bottenytans radie och h höjden. Volymen av cylindern är då $\pi r^2 h$ och att volymen ska vara 1 ger då att $\pi r^2 h = 1$ eller $h = 1/\pi r^2$.

Cylinderns begränsningsarea, som ska minimeras, ges av $2\pi r^2 + 2\pi r h$. Om vi i detta uttryck substituerar $h = 1/\pi r^2$ får vi att vi ska minimera funktionen

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

där $r > 0$. Vi deriverar och får

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$$

som existerar för alla $r > 0$. Vi ser att $A'(r) = 0 \iff 2r = 1/\pi r^2 = h$. Ett teckenstudium av derivatan ger vid handen att detta är en lokal och global minpunkt. Teckestudium:

Om $0 < r < 1/(2\pi)^{1/3}$ så är $A'(r) < 0$ och det följer att A är strängt avtagande här.

Om $r = 1/(2\pi)^{1/3}$ så är $A'(r) = 0$.

Om $r > 1/(2\pi)^{1/3}$ så är $A'(r) > 0$ och det följer att A är strängt växande här.

Materialåtgången minimeras alltså om höjden i cylindern är lika med diametern. □

Svar: Höjden i cylindern ska vara lika med diametern, dvs $r = 1/(2\pi)^{1/3}$ och $h = 2/(2\pi)^{1/3}$.

DEL B

4. Betrakta differentialekvationen $y''(t) + y(t) = \sin t$.
   A. Lös differentialekvationen.
   B. Avgör om det finns någon lösning till differentialekvationen som är begränsad.

Lösning. A. Den allmänna lösningen till differentialekvationen fås som $y_h + y_p$ där y_h är allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation, dvs $y'' + y = 0$, och y_p är någon partikulärlösning.

Först söker vi y_h. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har lösningarna $\pm i$ varför

$$y_h(t) = A\cos t + B\sin t,$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

Sedan söks y_p. Ett första förslag till ansättning vore $a\cos t + b\sin t$ men detta är en del av den homogena lösningen och fungerar därför inte. Vi ansätter därför

$$y_p = t(a\cos t + b\sin t).$$

I så fall är

$$y_p' = a\cos t + b\sin t + t(-a\sin t + b\cos t)$$

och

$$y_p'' = -a\sin t + b\cos t - a\sin t + b\cos t + t(-a\cos t - b\sin t).$$

Vi ser att $y_p'' + y_p = \sin t \iff a = -1/2$ och $b = 0$. Vi har alltså bestämt en partikulärlösning

$$y_p = -\frac{t}{2}\cos t.$$

Sammantaget får vi därför att lösningen till differentialekvationen i uppgiften är

$$y(t) = A\cos t + B\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$

För $t = n2\pi$ så gäller att $y(t) = A - n\pi$ som går mot $-\infty$ när heltalet $n \to \infty$, oavsett val av konstanter A och B. Det finns alltså ingen lösning som är begränsad. □

Svar: A. $y(t) = A\cos t + B\sin t - \frac{t}{2}\cos t$.
B. Nej.

5. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $x = 100$ till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ och använd det för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{104}$. Avgör sedan också om ditt närmevärde har ett fel som till absolutbeloppet är mindre än 10^{-3}.

Lösning. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

som existerar för alla $x > 0$. Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 100$ är därför

$$p(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100) - \frac{1}{8000}(x - 100)^2.$$

Om vi använder detta för approximation av $\sqrt{104}$ får vi

$$\sqrt{104} = f(104) \approx p(104) = 10 + \frac{1}{20}(104 - 100) - \frac{1}{8000}(104 - 100)^2 = 10.198.$$

Absolutbeloppet av felet i approximationen är, för något c mellan 100 och 104:

$$\left| \frac{3/8c^2\sqrt{c}}{3!} 4^3 \right| \leq \frac{4}{100000} \leq 10^{-3}$$

$\square$

Svar: Det sökta Taylorpolynomet är $p(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100) - \frac{1}{8000}(x - 100)^2$.
$\sqrt{104} \approx 10.198$ med ett fel som till beloppet är mindre än 10^{-3}

6. Approximera $y(0.2)$, där y löser differentialekvationen $y'(x) = \sin(5\pi xy)$ med initialvillkoret $y(0) = 1$, genom att göra två steg med Eulers metod.

Lösning. Eulers metod för lösning av differentialekvationen $y'(x) = f(x, y)$ lyder $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, där h är steglängden. Startpunkten för detta problem är $(x_0, y_0) = (0, 1)$, och vi använder steglängden $h = 0.1$. Eulers metod ger då

$$y_1 = y_0 + h\sin(5\pi x_0 y_0) = 1 + 0.1\sin(5\pi \cdot 0 \cdot 1) = 1 + 0.1 \cdot 0 = 1,$$
$$y_2 = y_1 + h\sin(5\pi x_1 y_1) = 1 + 0.1\sin(5\pi \cdot 0.1 \cdot 1) = 1.1.$$

Approximationen av $y(0.2)$ är alltså $y_2 = 1.1$.

$\square$

Svar: $y(0.2) \approx 1.1$

DEL C

7. A. Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a.
   B. Definiera vad som menas med att en funktion f är deriverbar i en punkt a.
   C. Visa att en funktion f som är deriverbar i en punkt a också måste vara kontinuerlig i a.
   D. Ge ett exempel som visar att en funktion som är kontinuerlig i en punkt inte måste vara deriverbar i punkten.

Lösning. A. Funktionen f är kontinuerlig i punkten a om f är definierad i a och och har gränsvärde när x närmar sig a och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

B. Funktionen f är deriverbar i punkten a om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar ändligt. Detta gränsvärde kallas i så fall derivatan av f i a, vilket skrivs $f'(a)$.

C. Anta att f är deriverbar i a. Vi ska visa att i så fall måste $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ eller ekvivalent att $\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) = 0$. Vi har att

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Beviset är klart.

D. Låt $f(x) = |x|$. Det är klart att f är kontinuerlig i origo, eftersom $f(0) = 0$ och $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Funktionen f är dock inte deriverbar i origo eftersom

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

och detta gränsvärde saknas (om h är positivt och går mot noll får vi 1 men om h är negativt och går mot noll får vi -1).

$\square$

Svar: Se lösningen.

8. Ett hål med radie 1 borras genom centrum av ett klot med radie 2. Hur stor andel av klotets volym är kvar?

Lösning. Låt oss välja koordinatsystem så att origo är klotets medelpunkt och klotet är den rotationsvolym som genereras då kurvan $x^2 + y^2 = 4$ roteras runt x-axeln. Vi kan anta att hålet borras så att x-axen är centrallinje för borr-cylindern. I så fall är skärningspunkterna mellan cylindern och klotet i xy-planet punkterna $(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$. Den bortborrade delen består då av en cylinder med radie 1 och höjd $2\sqrt{3}$ samt två sfäriska kalotter.

Cylinderns volym är $2\pi\sqrt{3}$. De sfäriska kalotterna fås som rotationsvolymer som genereras då kurvan $x^2 + y^2 = 4$ roteras runt x-axeln, dels på intervallet $[\sqrt{3}, 2]$, dels på intervallet $[-2, -\sqrt{3}]$. De sfäriska kalotternas volym är tillsammans

$$2\pi \int_{\sqrt{3}}^{2} (4 - x^2)\, dx = 2\pi \left(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3} \right).$$

Eftersom klotets volym är $32\pi/3$ får vi att andelen som tagits bort är

$$\frac{2\pi\sqrt{3} + 2\pi\left(\frac{16}{3} - 3\sqrt{3}\right)}{32\pi/3} = \frac{32\pi/3 - 4\pi\sqrt{3}}{32\pi/3} \approx 0.35.$$

Ungefär 35 procent av klotets volym har borrats bort och därmed är det ungefär 65 procent kvar.

$\square$

Svar: Ungefär 65 procent.

9. Skriv ett MATLAB-program som beräknar en approximation av lösningen α till ekvationen

$$\int_0^1 e^{\alpha x^2}\,dx = 2.$$

Lösning. Integralen approximeras med hjälp av trapetsregeln, och Newtons metod används för att lösa ekvationen i α. Funktionen vi vill finna ett nollställe till är alltså

$$f(\alpha) = h\big(\frac{1}{2}e^{\alpha x_0^2} + e^{\alpha x_1^2} + e^{\alpha x_2^2} + \ldots + e^{\alpha x_{n-1}^2} + \frac{1}{2}e^{\alpha x_n^2}\big) - 2,$$

där $(x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n) = (0, h, 2h, \ldots, 1)$. För Newtons metod behövs även derivatan av f:

$$f'(\alpha) = h\big(\frac{x_0^2}{2}e^{\alpha x_0^2} + x_1^2 e^{\alpha x_1^2} + x_2^2 e^{\alpha x_2^2} + \ldots + x_{n-1}^2 e^{\alpha x_{n-1}^2} + \frac{x_n^2}{2}e^{\alpha x_n^2}\big).$$

Matlab-koden som följer använder startgissningen $\alpha_0 = 0$.

```
x=0:h:1;
alphastep=1;
alpha=0;
while abs(alphastep) >1e-10
f=h*(sum(exp(alpha*x.^2))-exp(alpha*x(1)^2)/2...
-exp(alpha*x(end)^2)/2)-2;
fp=h*(sum(x.^2.*exp(alpha*x.^2))...
-x(1)^2*exp(alpha*x(1)^2)/2...
-x(end)^2*exp(alpha*x(end)^2)/2);
alphastep=f/fp;
alpha=alpha-alphastep;
end
disp(['alpha ges approximativt av: ' num2str(alpha)])
```

□

Svar: Se lösningen.