Viggo Kann, KTH CSC

Lösningar till teoritenta i Algoritmer, datastrukturer och komplexitet
2014-12-18

1. (6 p) Är följande påståenden sanna eller falska? För varje deluppgift ger riktigt svar 1 poäng och ett *övertygande motiverat* riktigt svar 2 poäng.

   a/c) $n^{3/2}(n + |sin(n^4)|) \in o(n^3)$.
   Sant. $n^{3/2}(n + |sin(n^4)|) \leq n^{3/2}(n+1) \in \Theta(n^{5/2}) \subset o(n^3)$ eftersom $5/2 = 3 - 1/2$.

   b/a) Med en Montecarloalgoritm är man säker på att få korrekt värde, men exekveringstiden kan variera.

   Falskt. Det som beskrivs är en Lasvegasalgoritm. En Montecarloalgoritm är tvärtom en probabilistisk algoritm där exekveringstiden inte varierar med slumpbitarna men svaret gör det.

   c/b) P⊆PSPACE

   Sant. P består av alla beslutsproblem som kan lösas i polynomisk tid och PSPACE av alla beslutsproblem som kan lösas med polynomiskt minne. Eftersom en algoritm (på en turingmaskin eller RAM) inte kan referera mer än konstant minne per tidssteg så kan en algoritm som går i polynomisk tid inte använda mer än polynomiskt mycket minne.

2. (3 p) A, B, C och D är beslutsproblem. Anta att B är NP-fullständigt och att det finns polynomiska Karpreduktioner mellan problemen så här (en reduktion av A till B tecknas här $A \to B$):

   $$A \quad \leftrightarrow \quad B \quad \leftarrow \quad C \quad \rightarrow \quad D$$

   Vad vet man då om komplexiteten för A, C och D? Sätt ett kryss i tabellen nedan för det man säkert vet och en ring för det som är möjligt men som man inte vet säkert.

	ligger i NP	är NP-fullständigt	är NP-svårt
A	X	X	X
C	X	○	○
D	○	○	○

3. (1 p) a) Vad är den engelska termen för *NP-fullständig*?

   NP-complete.

   b) Vad är den engelska termen för *oavgörbar*?

   Undecidable.

4. (4 p) a) Definiera komplexitetsklassen *NP*.

   NP består av alla beslutsproblem A som uppfyller följande: det finns en polynomisk algoritm som givet en instans till A och en lösning verifierar att det är en ja-instans.

   En alternativ ekvivalent definition av NP är att det finns en ickedeterministisk turingmaskin som känner igen (ja-instanser till) A i polynomisk tid.

   b) Definiera begreppet *avgörbart problem*.

   Ett beslutsproblem B är avgörbart om det finns en algoritm som löser problemet i ändlig tid.

5. (Uppgift för betyg D)
Ge exakt tre (konceptuellt olika) förslag på hur man kan angripa NP-svåra optimeringsproblem (som vanligt förutsatt att P$\neq$NP).

   1. Konstruera en approximationsalgoritm som ger en garanti på hur långt ifrån det optimala värdet resultatet är.

   2. Konstruera en heuristik som hittar en lösning men inte ger någon garanti.

   3. Begränsa problemet (helst med hänsyn till det verkliga tillämpningen) och se om det begränsade problemet är enklare att lösa.

   En fjärde möjlighet är att konstruera en algoritm som löser problemet i exponentiell tid med totalsökning, som i praktiken bara kan användas för små indata.

6. (Uppgift för betyg C)
Optimeringsproblemet *Maximal delmängdssumma* tar som indata ett mål M och en lista med positiva heltal $t_1, t_2, \ldots, t_n$. I denna uppgift antar vi att heltalsföljden är växande, dvs $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$. En tillåten lösning till problemet är en delmängd av talen i listan som har summa mindre än eller lika med M. Vi söker en lösning som har så stor summa som möjligt.

   Uppgiften är att konstruera en heuristik för Maximal delmängdssumma som först konstruerar en lösning och därefter använder lokalsökning för att förbättra lösningen.

MaxDelmängdssummeHeuristik(M, $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$) =
   // Konstruktion:
   $sum \leftarrow 0$; $subset \leftarrow \emptyset$
   for $i \leftarrow 1$ to n do
      if $sum + t_i > M$ then break
      $sum \leftarrow sum + t_i$
      $subset \leftarrow subset \cup \{i\}$
   // Lokalsökning:
   Så länge det går att göra någon förbättring:
      Hitta $i \in subset$ och $j \notin subset$ så att $i < j \leq n$ och $sum - t_i + t_j \leq M$
         $sum \leftarrow sum - t_i + t_j$
         $subset \leftarrow subset - \{i\} \cup \{j\}$ // byt ut index i mot j
   return $subset$

På kurswebben ligger en kursenkät som var och en uppmanas att svara på så snart som möjligt. Viggo och 2015 års elever på kursen tackar på förhand!

Vill du ha högre betyg på kursen? Om du har fått minst betyg C på två av dom betygsatta kursmomenten (teoritentan, mästarprov 1, mästarprov 2) och minst betyg E på det tredje så får du boka in dej på muntlig redovisning 15-16 januari 2015, se kurswebben.
Om du blir godkänd på teoritentan och redovisar extralabben 13 januari så får du räkna extralabbsbetyget som teoritentabetyg.
Det går bra att i senare kursomgångar plussa mästarprov och teoritenta.