Uppgifter, 2014

Tillämpad linjär algebra

Geometri.

1. **Uppgift.** Låt $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 2, 3)$, $C = (1, 1, 0)$ vara punkter i $\mathbb{R}^3$.
   (1) Beskriva på parameter form alla plan som innehåler A, B och C. Ger ett system av linjära ekvationer som beskriver planet
   (2) Låt L vara en linje genom A och B. Beskriva L på parameter form. Ger ett system av linjära ekvationer som beskriver L.
   (3) Beräkna avståndet mellan C och linjen L.
   (4) Beräkna area av triangel ABC.
   (5) Beräkna area av parallellogram som spanns av A, B, och C.

2. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (1) Bestäm en ekvation för planet $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$.
   (2) Bestäm a såatt $\vec{u}$ ligger i planet $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$.

3. **Uppgift.** Betrakta en linje L_1 i $\mathbb{R}^3$ som ges av $(1, 1, 1) + t(1, 2, 2)$.
   (1) Bestäm all värde på a så att linjen L_2 genom $(-1, -1, 2)$ och $(a, 5, 5)$ skär linjen L_1 och bestäm skärningen.
   (2) För alla värden från (2), bestäm en ekvation av planet som innehåler L_1 och L_2.

4. **Uppgift.** Låt plan P_1 och P_2 i $\mathbb{R}^3$ ges av parameter form $(2s + t, 3s - 2t, s)$ och $(t, s, t - s)$. Bestäm ekvationer som beskriver P_1 och P_2. Beskriv snittet av P_1 och P_2 på parameter form.

5. **Uppgift.** Låt $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ vara punkter och $2x - y = 2$ en linje L i $\mathbb{R}^2$.
   (1) Hitta en punkt P på linjen L så att triangel ABP är vinkelrätt i P.
   (2) Hitta en punkt P på linjen L att triangel ABP är vinkelrätt i A.
   (3) Hitta en punkt P på linjen L att triangel ABP är vinkelrätt i B.

6. **Uppgift.** Betrakta följande plan i $\mathbb{R}^3$ P_1 som ges av $x + 2y + z = 1$, P_2 som ges av $2x - 3y + z = 2$, och P_3 som ges av $4x + 5y - 2z = -1$. Beskriva all punkter på linjer som ges av snittet av P_1 och P_2, P_2 och P_3, P_1 och P_3. Avgör om det finns en punkt som ligger på alla plan.

7. **Uppgift.** Betrakta två plan P_1 och P_2 i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationer:

$$P_1: \quad x - y + z = 2 \qquad\qquad P_2: \; 2x + 2z = 1$$

   (1) En linje $(1, 1, 0) + t(2, 0, 3)$ speglas genom P_1 till en linje L. Undersök om L skär planet P_2.

(2) Bestäm alla verktorer i P_1 som har längden 2 och är ortogonala till $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. **Uppgift.** Låt L är en linje i $\mathbb{R}^3$ som ges av:

$$x + y + z = 1$$
$$-x - y + z = 0$$

(1) Hur många plan finns det $\mathbb{R}^3$ som innehåller L och punkten $(-1, 0, 3)$.
(2) Bestäm en ekvation av något plan som innehåller L och punkten $(-1, 0, 3)$.
(3) Bestäm all del rum i $\mathbb{R}^3$ som innehåller L.
(4) Bestäm en ekvation till planet som innehåller L och är ortogonal till planet $2x - 3y + z = 1$.

9. **Uppgift.** Triangelns hörn ges av $(2, -1, 3)$, $(-1, -2, -3)$ och $(1, 3, 4)$. Bestäm mittpunkterna på sidorna av triangeln.

Lösningar av system av linjära ekvationer, Gauss-Jordan, determinanter.

10. **Uppgift.** Betrakta ett system av linjära ekvationer:

$$2x + y + z = b$$
$$2x + ay + 3z = 2$$
$$-x - y - z = 3$$

(1) Skriv systemet som en matrisekvation $A\vec{x} = \vec{v}$.
(2) Hitta värda av a och b så att systemet har inga lösningar.
(3) Hitta värde av a och b så att systemet har precis en lösning.
(4) Hitta värde av a och b så att systemet har oändlig många lösningar och hitta dem.
(5) Bestäm detrerminananten till A.
(6) För vilka a matrisen A är inverterbar

11. **Uppgift.**

(1) Låt $W = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$. Bestäm ett ekvation system som har W för lösningsmängden.
(2) Bestäm en matris A så att $W = \ker(A)$.

12. **Uppgift.** Betrakta ett plan P i $\mathbb{R}^3$ som ges på parameter from $\begin{bmatrix} 2t - s \\ t + s \\ -t - s \end{bmatrix}$. Bestäm ett ekvation system som beskriver planet P.

13. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris E så att matrisen EA bildas från A genom Gauss-Jordan operationerna (dessa operationer appliceras på A): första raden multipliceras med 2, första raden multipliceras med -1 och adderas till andra raden, första raden byter plats med trädje raden.

14. **Uppgift.** Betrakta följande systemet:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_3 = 0$$

(1) Förklara varför lösningmängden W till systemet är ett delrum i $\mathbf{R}^4$.
(2) Bestäm en bas till lösningmängden W.
(3) Besteäm en linjär avbildning $g\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ så att $\operatorname{im}(g) = W$.

(4) Besteäm en linjär avbildning $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ så att $\ker(f) = W$.
(5) Besteäm en bas till ortogonala komplementet av W.

Linjära avbildningar och matriser.

15. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Är det sant att vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ligger i $\operatorname{im}(A)$?
(2) Bestäm $\ker(A)$.
(3) Bevisa att linjen $2x + 3y = 2$ avbildas till en linje L och inte en punkt. Hitta en ekvation som beskriver $A(L)$.
(4) Bestäm om linjen $3x - y = 5$ avbildas till en punkt eller en linje och beskrev detta.

16. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning så att:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) Förklara varför finns det bara en sådana linjär avbildning.
(2) Bestäm matrisen till f och hitta $f(x, y, z)$.
(3) Bestäm $\operatorname{im}(f)$.
(4) Bestäm an bas till bildrum $\operatorname{im}(f)$ och en bas till nollrum $\ker(f)$.

17. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning så att:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) Bestäm matrisen till f och hitta $f(x, y)$.
(2) Är det sant att $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^2$.
(3) Bestäm $f(\Omega)$, där Ω är enhetskvadrat som spans av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Rita up $f(\Omega)$.

18. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen L_1 som ges av $2x - 2y = 0$ och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen L_2 som ges av $3x + 2y = 0$.

(1) Hitta matrisen till f, g, fg, och gf.
(2) Förklara hur parallellogramet som spanns av $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ avbildas genom f.

19. **Uppgift.** Bestäm alla 3×3 matriser A så att $\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ och $\ker(A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

20. **Uppgift.**

(1) förklara varför lösningar till följande system är ett delrum i $\mathbb{R}^4$

$$x_1 + x_2 = x_3$$

$$x_1 + x_3 = -x_2 + x_4$$

(2) Hitta en 4×4 matris A vars bildrum är lösningar till systemet ovan.

21. **Uppgift.** Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(1) Är det sant att vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ är linjär oberoende?

(2) Bestäm en linjär avbildning $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ så att $\ker(f) = \mathrm{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

22. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bevisa att linjen $2x + 3y = 2$ avbildas till en linje L och inte en punkt. Hitta en ekvation som beskriver L.

23. **Uppgift.**

(1) Bevisa att lösningen till följande systemet beskriver an linje L i $\mathbb{R}^3$:

$$2x - 2y + 3z = -1$$

$$2x + y + z = 1$$

(2) Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bevisa att linjen L, som definieras i (1) avbildas till en linje L_1 och inte en punkt. Hitta en ekvation som beskriver L_1.

(3) Bestäm rangen till A och determinanten till A.

24. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Undersök om $\operatorname{im}(A)$ och $\operatorname{im}(B)$ skär varandra och hitta alla vektorer i skärningen. Förklara varför skärningen är ett delrum i $\mathbb{R}^3$ och beräkna sitt dimension.
(2) Hitta en vektor i $\operatorname{im}(A)$ som inte ligger i $\operatorname{im}(B)$.

25. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bevisa att matrisen A uppfyller följande likheten:

$$A^3 - 3A^2 + 4A - 5 = 0$$

Linjär oberoende vektorer, baser, koordinater i olika baser.

26. **Uppgift.** Bevisa att vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ är linjär beroende om ch endast om $u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0$.

27. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) Förklara varför $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$ är en bas till $\mathbb{R}^3$.
(2) Hitta koordinaterna av $\vec{t}$ i basen $\mathcal{B}$.
(3) Låt $3x^2 - y^2 + xz - yz = 0$ vara en kurva i standarda koordinater. Bestäm ekvation för kurvan i koordinater a, b, c i basen $\mathcal{B}$.

28. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) Bestäm en bas till $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.
(2) Bestäm en bas till $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)^\perp$.

29. **Uppgift.** Låt $W = \operatorname{span}(\vec{v}, \vec{u})$, där:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) Förklara varför $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ är en bas till W.
(2) Låt $\mathcal{C}$ vara en bas till W och $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ vara en övergångsmatrisen från bas $\mathcal{B}$ till bas $\mathcal{C}$. Bestäm vektorerna som ligger i $\mathcal{C}$.
(3) Undesök om vektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ligger i W och i så fall bestäm koordinaterna i bas $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.

30. **Uppgift.** Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ vara två bas for ett delrum Vi $\mathbb{R}^{100}$. Antar att övergångsmatrisen från bas $\mathcal{V}$ till bas $\mathcal{W}$ ges av $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

(1) Bestäm övergångsmatrisen från bas $\mathcal{W}$ till bas $\mathcal{V}$

(2) Låt $f\colon V \to V$ vara en linjär avbildning så att $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$.

31. **Uppgift.** Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ en bas till V. Antar att $\vec{x}$, $\vec{y}$, och $\vec{z}$ är vektorer i V så att:

$$\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} \qquad \vec{y} = \vec{u} + \vec{v} \qquad \vec{z} = -\vec{v} - \vec{w}$$

(1) Hitta koordinaterna av $\vec{x}$, $\vec{y}$ och $\vec{z}$ i bas $\mathcal{B}$.
(2) Förklara varför $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ är en bas till V.
(3) Hitta koordinaterna av $\vec{v}$ i basen $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$.

32. **Uppgift.** Låt L vara en linje i $\mathbf{R}^2$ med riknigsvektor $\vec{u}$ and normal vektor $\vec{n}$. Lå $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara speglingen i L och $\mathrm{proj}_L\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara orotgonal projektion på linjen L.

(1) Betrakta en bas $\mathcal{V} = \{\vec{u}, \vec{n}\}$. Bestäm matriser $[f]_{\mathcal{V}}$ och $[\mathrm{proj}_L]_{\mathcal{V}}$.
(2) Bestm $[f(\vec{w})]_{\mathcal{V}}$ och $[\mathrm{proj}_L(\vec{w})]_{\mathcal{V}}$ om $\vec{w} = 2\vec{u} - 4\vec{n}$.

33. **Uppgift.**

(1) Förklara varför följande vektorer bildar en bas i $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) Låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ och $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm $[A]_{\mathcal{B}}$.
(3) Låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ och $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm A.
(4) Låt $3x^2 - 2xy + 12y^2 = 2$ vara en kurva i standarda koordinater. Bestäm ekvation för kurvan i koordinater w och z i basen $\mathcal{B}$.

34. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Bestäm en bas $\mathcal{V} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ i $\mathbb{R}^2$ så att $[A]_{\mathcal{V}} = B$.
(2) Bestäm $[C]_{\mathcal{V}}$.

35. **Uppgift.** Låt V vara delrum i $\mathbb{R}^3$ som ges av $2x - 2y + z = 0$. Bestäm matrisrepresentation till ortogonala projektionen på V i någon bas.

Egenvärden och egenvektorer.

36. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Bevisa at -2 är en eigenvärde till A och bestäm måtsvarande eigenvektorer.
(2) Bestäm karaktäristiska polynomet för A.

37. **Uppgift.** Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. Bestäm egenvrden och egenvektorer till $\mathrm{proj}_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

38. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som har -1, 0 och 2 för egenvärden.

(1) Bestäm egenvärden till sammansätning f^2.
(2) Kan f diagonalizaras?
(3) Kan f^2 diagonalizeras?

39. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Antar att $f^{135} = 0$. Bevisa att den enda eigenvärdet av f är 0.

40. **Uppgift.** Låt $\mathcal{P}_n$ vara mängden av alla polynomer $p(x)$ av grad högst n. Genom följande kan vi identifiera $\mathcal{P}_n$ med vektorrum $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n \mapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Låt $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ vara derivata, dvs, $D(a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n) = a_1 + \frac{a_2}{2} x + \cdots + \frac{a_n}{n} x^{n-1}$.

(1) Bevisa att polynomer 1, x, x^2,..., x^n bildar en bas av $\mathcal{P}_n$. Den bas kallas för standardbasen till $\mathcal{P}_n$.
(2) Bestäm standardmatrisen till D för $n = 5$ och $n = 10$.
(3) Bevisa att $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ är linjär avbildning.
(4) Bestäm eigenvärden till D och måstvarande eigenvektorer.

41. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) Hitta egenvärden och motsvarande egenvektorer till matriser A och $2A$.
(2) Rita egenrummen till A.
(3) Bestäm en 2×2 matris S så att $S^{-1}AS$ är diagonal matris.
(4) Bestäm A^{139}.

42. **Uppgift.** Låt A vara $n \times n$ matris så att $\det(A) = 0$.

(1) Förklara varför A har en egenvektor.
(2) Förklara varför det finns en bas $\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}^n$, så att matrisen $[A]_{\mathcal{B}}$ har noll vektor som första kolonnen.

43**. Uppgift.** Låt A vara 4×4 symmetrisk matris som har följande vektorer som egenvektorer:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Förklara varför egenvärdet till $\vec{v}$ är lika med egenvärdet till $\vec{u}$.

44**. Uppgift.** Hitta alla värde av a så att följande matris är inte diagonaliserbar:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

45**. Uppgift.** Låt A vara $n \times n$ matris. Antar att för varje vektor v, $|A(v)| = |v|$ (A bevarar längden). Visa att 1 och -1 är de enda möjliga egenvärdena till A.

Orthogonalitet, symmetriska matriser, Gram-Schmidt process.

46. **Uppgift.** Betrakta delrum V i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen:

$$2x + 3y - z = 0$$

Bestäm en ON bas till V.

47. **Uppgift.** Bevisa att följande vektorer är ortogonala:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Utvidga $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ till en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$.

48. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Hitta orthonormal bas till $\ker(A)$ och $\operatorname{im}(A)$.

(2) Bevisa att $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i $\ker(A)$ och beräkna koordinater av $\vec{v}$ anavseende på basen från (1).

(3) Bestäm standard matris till $\operatorname{proj}_{\ker(A)} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$.

(4) Bestäm $\operatorname{proj}_{\ker(A)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

49. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en ortonormal bas till $\operatorname{span}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.

50. **Uppgift.** Låt A vara $n \times n$ matris. Antar att n är ett ojämnt tal. Visa att A har en egenvektor.

51. **Uppgift.** Låt $\vec{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^{100}$. Betrakta matrisen $A = \vec{v}\vec{v}^T$. Bevisa att A kan ortogonalt diagonaliseras.

52. **Uppgift.** Bestäm alla symmetriska 4×4 matriser A så att $\dim(\ker(A)) = 3$ och som har $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ för egenvektor med egenvärdet -1.

Minstakvadratmetoden.

53. **Uppgift.** Anpassa kurvan $y = ax + b$ med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-40	-20	20	40
y	1	2	6	8

54. **Uppgift.** Anpassa kurvan $y = ax^2+bx+c$ med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	0	2	8