Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder BE3002/3
8.00-11.00 13/3 2014

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 3.

1. Givet är en differentialekvation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(\frac{dy}{dt}) + \gamma y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

där γ är en parameter (oberoende av t).

(a) **[4p]** Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer på vektorform, dvs.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(t, \mathbf{u}).$$

(b) **[7p]** Skriv en MATLAB/Octave-funktion som tar parametern γ som argument, och returnerar en approximation till $y(1)$, beräknad med Eulers metod med steglängd $h = 0.001$.

(c) **[7p]** Vi vill hitta ett värde på γ som ger $y(1) = 0$. Skriv ett MATLAB/Octave-program som med intervallhalveringsmetoden eller sekantmetoden bestämmer detta värde. Programmet kan anropa den funktion du konstruerat i uppgift (b). En lösning ligger i närheten av $\gamma = 3$.

Låt $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$. *Då blir ekvationen*

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ -\sin u_2(t) - \gamma u_1(t) \end{bmatrix} =: f\big(t, \boldsymbol{u}(t)\big)\,.$$

Ett exempel på matlabfunktion är

```
function y1= eulerg( gamma )
h=0.001; %steglangd
N=1/h;
u=[1;0];
for n=1:N
    u=u+h*[u(2);-sin(u(2))-gamma*u(1)];
end
y1=u(1);
end
```

och ett exempel på intervallhalvering är

```
g0=2.5; %startvarde
g1=3.5; %startvarde
f0=eulerg(g0); %motsvarande funktionsvarde
f1=eulerg(g1);
N=20;   % antal intervallhalveringar
if(f0*f1>0)
    error('startfunktionsvarden med samma tecken')
end
for n=1:N
    g=(g0+g1)*0.5;
    fx=eulerg(g);
    if(f0*fx<0)
        g1=g;
        f1=fx;
    else
        g0=g;
        f0=fx;
    end
end
disp('gamma=')
disp(g)
```

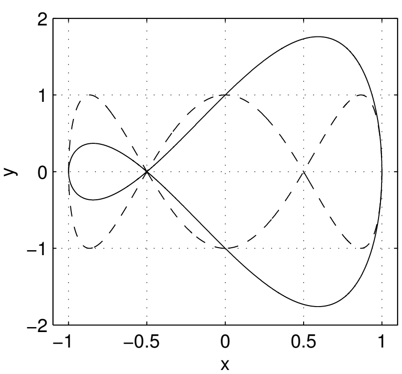
2. Följande två kurvor är givna:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \sin(2t) + \cos(t) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} x(s) &= \sin(s) \\ y(s) &= \cos(\alpha s). \end{aligned}$$

För $\alpha = 3$ är kurvorna plottade i figuren bredvid.



(a) **[3p]** Visa att när $\alpha = 3$ har kurvorna en skärningspunkt för $t = 2\pi$ och $s = 2\pi$. Ange x och y-koordinaten för punkten.

(b) **[6p]** Vi ska nu hitta en skärningspunkt när $\alpha = 3.01$. Formulera problemet som ett olinjärt ekvationssystem i två variabler.

(c) **[7p]** Skriv ett MATLAB/Octave-program som med Newtons metod bestämmer en lösning.

Vi har $\big(x(2\pi), y(2\pi)\big) = (\sin 2\pi, \sin 4\pi + \cos 2\pi) = (0, 1)$ *i första kurvan och* $\big(x(2\pi), y(2\pi)\big) = (\sin 2\pi, \cos 6\pi) = (0, 1)$ *i andra kurvan.*

Ekvationssystemet lyder

$$\sin t - \sin s = 0$$
$$\sin 2t + \cos t - \cos(\alpha s) = 0$$

vilket för $y = (t, s)$ kan skrivas

$$f(y) = \begin{bmatrix} \sin y_1 - \sin y_2 \\ \sin 2y_1 + \cos y_1 - \cos(\alpha y_2) \end{bmatrix} = 0$$

och Jacobianen blir

$$f'(y) = \begin{bmatrix} \cos y_1 & -\cos y_2 \\ 2\cos 2y_1 - \sin y_1 & \alpha \sin(\alpha y_2) \end{bmatrix}$$

så Newtonsteget är: lös $f'(y)d = f(y)$ och låt $y = y - d$.

Ett exempel på matlaprogram är

```
%Newtons metod for skarande kurvor
alfa=3.01;     %parameter
y=[2*pi;2*pi]; %startgissning
tol=1e-10;     %tolerans
r=norm(y);
while r>tol
    f =[sin(y(1))-sin(y(2)); sin(2*y(1))+cos(y(1))-cos(alfa*y(2))] %funktion
    fp=[cos(y(1)), -cos(y(2));
        2*cos(y(1))-sin(y(1)), alfa*sin(alfa*y(2))]; %Jacobian
    d=fp\f;
    y=y-d;                                          %Newtonsteg
    r=norm(d);                                      %andring i y
end
disp('(t,s)')
disp(y)
```

Uppgift 3 **eller** den alternativa uppgiften får göras, inte båda!

3. (16p) Låt $f(x) = \sin(x)$. Bestäm en konstant C sådan att

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right| \leq Ch^2$$

för alla $h \neq 0$.

Taylorutveckling ger

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}h^3,$$

för någon ξ *mellan* 0 *och* h. *Eftersom* $f''(0) = 0$ *får vi*

$$\Big|\frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0)\Big| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}h^2 \leq \frac{1}{6}h^2,$$

så $C = 1/6$ *fungerar.*

Alternativ uppgift 3. (16p) Formulera och bevisa en sats om konvergens av Newton-Raphsons metod.

Se sats 1.11 i kursboken av Sauer.