December 2, 2014. Föreläsning 22.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Matriser av linjära funktioner i olika bas
- Diagonalizering

1. Betrakta en matris $n \times n$ matris $A$ och en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Hitta:

$$A^{10000}\vec{v}$$

Den enklaste situation är när $A$ är en diagonal matris:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

I den situation har vi

$$A^{100000} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{100000} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100000} & 0\cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3^{100000} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{100000} \end{bmatrix}$$

Vad kan vi göra om $A$ är inte diagonal matris? Kan vi hitta en bas $\mathcal{B}$ så att $[A]_{\mathcal{B}}$ är diagonal.

2. Komma ihåg:

- Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Följande matris kallas för matrisen till $f$ i bas $\mathcal{B}$:

$$[f]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} [f(\vec{v}_1)]_{\mathcal{V}} & [f(\vec{v}_2)]_{\mathcal{V}} & \cdots & [f(\vec{v}_n)]_{\mathcal{V}} \end{bmatrix}$$

- Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.
  (1) For varje vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ finns det följande likheten:

$$[f(\vec{v})]_{\mathcal{V}} = [f]_{\mathcal{V}}[\vec{v}]_{\mathcal{V}}$$

  (2) $[f]_{\mathcal{V}}$ är den enda matris så att $[f(\vec{v})]_{\mathcal{V}} = [f]_{\mathcal{V}}[\vec{v}]_{\mathcal{V}}$.
- Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ vara baser i $\mathbb{R}^n$. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med motsvarande standard matris $A$. Då:

$$[f]_{\mathcal{V}} = T_{\mathcal{W}\to\mathcal{V}}[f]_{\mathcal{W}}T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}$$

3. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bevisa att $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ är bas i $\mathbb{R}^3$ och bestäm $[A]_{\mathcal{V}}$, $[A]_{\mathcal{W}}$, $T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}$ och $T_{\mathcal{W}\to\mathcal{V}}$.

4. Låt $\beta = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $A$ en $n \times n$ matris. Vad betyder att $[A]_\beta$ är diagonal matris $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$? Det betyder att:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2, \quad \ldots, \quad A\vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n$$

dvs att $\vec{v}_i$ är eigenvektor till $A$ med eigenvärde $\lambda_i$, för alla $i$. Altså det finns en bas $\beta$ så att $[A]_\beta$ är diagonal om och endast om det finns en bas som består av eigenvektorer till $A$.

5. Komma ihåg:

- Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. En vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för en egenvektor till $f$ med egenvärde $\lambda$ om $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
- Låt $A$ vara $n \times n$ matris. En vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för en egenvektor till $A$ med egenvärde $\lambda$ om $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Till exampel:

- Alla vektorer som är inte $\vec{0}$ är egenvektorer till $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med egenvärde 1.
- Låt $\mathrm{proj}_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $L$. Alla vektorer som är inte $\vec{0}$ och ligger på linjen är egenvektoerer till $\mathrm{proj}_L$ med egenvärde 1. Alla vektorer som är inte $\vec{0}$ och är ortogonala till $L$ är egenvektoerer till $\mathrm{proj}_L$ med egenvärde 0.
- Vridningen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\pi > \alpha > 0$ radianer har inga egenvektorer.

6. **Proposition.** *Om $\vec{v}$ är egenvektor till $A$ med egenvärde $\lambda$, då $\vec{v}$ är egenvektor till $A^n$ med egenvärde $\lambda^n$.*

7. **Uppgift.** Låt $A$ vara $n \times n$ matris. Förklara varför $A$ och $20A$ har samma egenvektorer. Har dem matriserna samma egenvärden?

8. Betrakta en matris $n \times n$ matris $A$ och en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Bestäm:

$$A^{10000}\vec{v}$$

Strategi I: hitta en bas $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}s_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Skriv $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}v_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n$ (dvs hitta koordinaterna av $\vec{v}$ i bas $\mathcal{B}$).

$$A^{10000}\vec{v} = A^{10000}(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1A^{10000}\vec{v}_1 + x_2A^{10000}\vec{v}_2 + \cdots + x_nA^{10000}\vec{v}_n =$$

$$= x_1\lambda_1^{10000}\vec{v}_1 + x_2\lambda_2^{10000}\vec{v}_2 + \cdots + x_n\lambda_n^{100000}\vec{v}_n$$

$A^{10000}$ transformeras en vektor $[\vec{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ till $[A^{10000}v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} x_1\lambda_1^{10000} \\ x_2\lambda_2^{10000} \\ \vdots \\ x_n\lambda_n^{10000} \end{bmatrix}$.

Strategi II: hitta en bas så att:

$$[A]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{S}$ var standarda basen till $\mathbb{R}^n$. Betrakta bas byte matriser $T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}$ och $T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}$. Vi har:

$$A = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_\mathcal{B}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}} \qquad [A]_\mathcal{B} = T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}AT_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}$$

Det betyder att:

$$A^{100000} = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_\mathcal{B}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_\mathcal{B}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_\mathcal{B}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}\cdots T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_\mathcal{B}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}$$

Vi har också att $T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}} = I$, som ger:

$$A^{100000} = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_\mathcal{B}^{100000}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}$$

9. **Definition.** An $n \times n$ matris $A$ kallas för diagonaliserbar om det finns en bas $\mathcal{B}$ så att $[A]_\mathcal{B}$ är diagonal. Diagonala matrisen $[A]_\mathcal{B}$ kallas för diagonalisering av $A$ (vi säger att basen $\mathcal{B}$ diagonalizerar $A$).

10**. Proposition.** Följande är ekvivalenta:

(1) $A$ är diagonalizerbar
(2) Det finns en inverterbar matris $S$ så att $S^{-1}AS$ är diagonal (vi säger att $S$ diagonalizerar $A$).

11**. Proposition.** Om $S$ är en $n \times n$ matris så att:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

då kolonnerna av $S$ består av eigenvärden till $A$ med motsvarande eigenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

**12. Proposition.**

(1) $A$ är diagonalizerbar om och endast om det finns en bas som består av eigenvektorer till $A$. I så fall om $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ är sådana bas, då $S^{-1}AS$ är diagonal där $S = [\vec{v}_1 \ \cdots \vec{v}_n]$.

(2) Om $A$ är diagonalizerbar, då koefficienterna på diagonalen i en diagonalizering av $A$ består av eigenvärden till $A$.

13. Komma ihåg:

- Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ vara eigenvektorer till $A$ som motsvarar olika eigenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Då vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ är linjär oberoende.
- Om en $n \times n$matris $A$ har $n$-olika eigenvärden, då $A$är diagonalizerbar.

Till exampel kan du förklara varför följande matris är diagonalizerbar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

**14. Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Bestäm eigenvärden till $A$ och motsvarande eigenvektorer. Är $A$ diagonalizerbar? I så fall bestäm diagonalizeringen till $A$. Bestäm matrisen $S$ så att $S^{-1}AS$ är en diagonal matris. Beräkna $A^{111}$.

**15. Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Bestäm eigenvärden till $A$ och motsvarande eigenvektorer. Är $A$ diagonalizerbar? I så fall bestäm diagonalizeringen till $A$. Bestäm matrisen $S$ så att $S^{-1}AS$ är en diagonal matris. Beräkna $A^{131}$.