1 december, 2014, Föreläsning 21

Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Ortonormala baser (ON-baser)
- Gram-Schmidt's ortogonaliseringsprocess

Minsta-kvadratmetoden - exempel som löses på föreläsningen

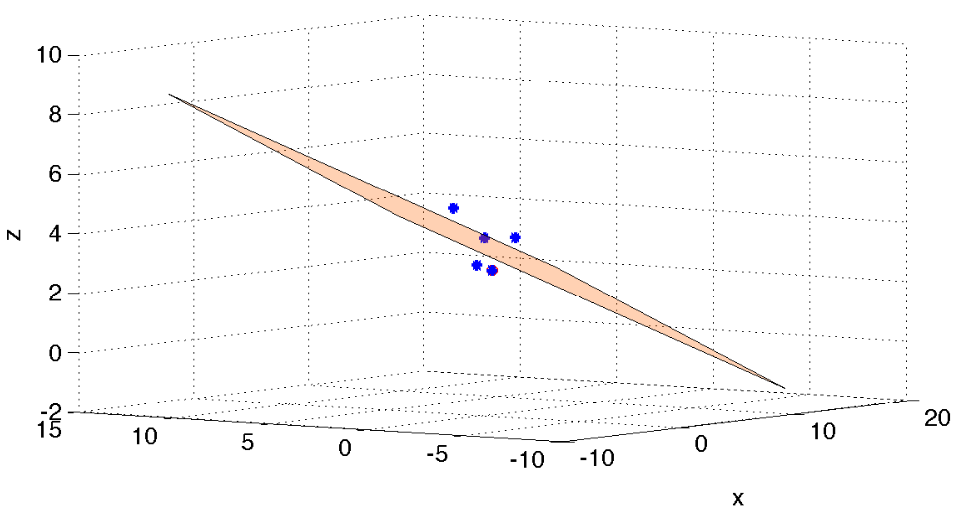
1. **Uppgift.** Tentauppgift från SF1624.

Använd minsta-kvadratmetoden för att bestämma en ekvation för det plan H som ligger närmast punkterna

$$(-1,-1,3), \quad (-1,1,5), \quad (0,0,04), \quad (1,-1,4), \quad \text{och } (1,1,3).$$

Se figuren nedan.

Du kan anta att ekvationen för planet är på formen $ax + by + z + d = 0$.



2. **Ortogonal/ortonormal**

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vad innebär det att vektorerna är

- Ortogonala?
- Ortonormala?

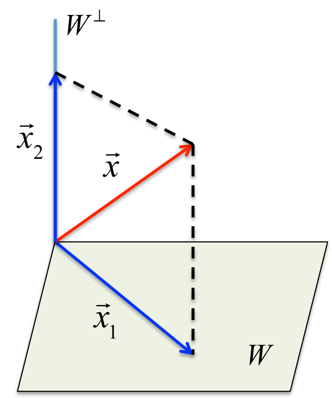
3. En ortogonal mängd av nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende.

4. Projektion på delrum med ortonormal bas

Vi vet sedan tidigare att om W är ett nollskilt delrum till $\mathbb{R}^n$ och $\vec{x}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ då ges den ortogonala projektionen av $\vec{x}$ på W av

$$\text{proj}_W \vec{x} = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{x}$$

där M är en matris vars kolonner bildar en bas för W.



Om kolonnvektorerna i M är ortonormala är $M^T M = I$ och ortogonala projektionen av $\vec{x}$ på W kan skrivas som

$$\text{proj}_W \vec{x} = M M^T \vec{x}$$

5. Ortogonal projektion på ON-baser

Om $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$ är en bas för W i $\mathbb{R}^n$ och $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ då gäller

a) Om det är en ORTONORMAL bas så är

$$\text{proj}_W \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k \tag{1}$$

b) Om det är en ORTOGONAL bas så är

$$\text{proj}_W \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 + \cdots + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|^2}\vec{v}_k \tag{2}$$

6. **Uppgift.** Olika sätt att beräkna ortogonal projektion.

En bas för planet W i $\mathbb{R}^3$ är given av $\vec{v}_1 = (0, 1, -1)$ och $\vec{v}_2 = (1, 2, 2)$.

a) Hur ser vi att det är en bas?
b) Är det en ortogonal bas?
c) Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W med hjälp av formel (2).
d) Normalisera basvektorerna.
e) Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på Wmed hjälp av formel (1).
f) Låt nu de normaliserade basvektorerna utgör kolonnerna i matrisen M. Beräkna M^TM samt MM^T.
g) Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W genom att använda standardmatrisen för den ortogonala projektionen, MM^T.

Ortonormala baser (ON-baser)

7. Alla nollskilda delrum till $\mathbb{R}^n$ har en ortogonal bas.

8**. Gram-Schmidt's process**:

Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och låt $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_k\}$ vara en bas för W. Följande steg kommer att producera en ortogonal bas, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$, för W.

Steg 1: Låt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$.

Steg 2: Hitta en vektor $\vec{v}_2$ som är ortogonal mot $\vec{v}_1$. Vektorn $\vec{v}_2$ är ortogonal mot $\vec{v}_1$ om $\vec{v}_2$ väljs som

$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \text{proj}_{W_1}\vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1$$

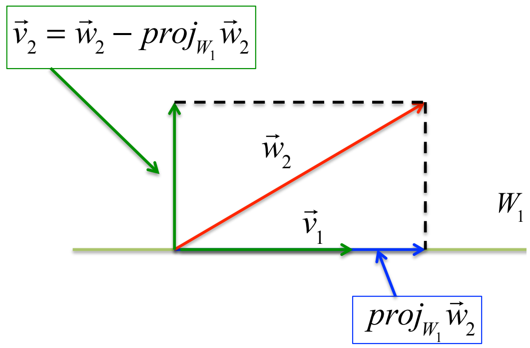
där W_1 är det delrum som spänns upp av $\vec{v}_1$, se Figur 1.

Steg 3: Hitta en vektor $\vec{v}_3$ som är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. Vektorn $\vec{v}_3$ är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ om $\vec{v}_3$ väljs som

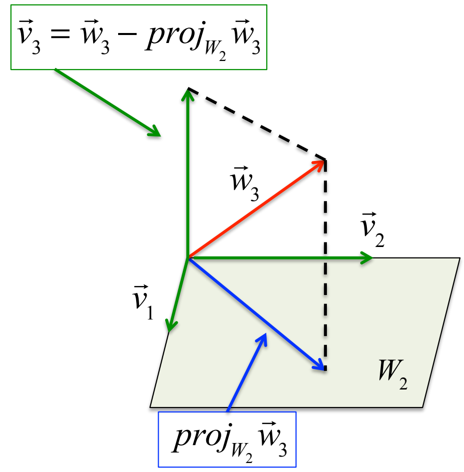
$$\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{W_2}\vec{w}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2$$

där W_2 är det delrum som spänns upp av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$, se Figur 2.

Steg 4-k: Fortsätt som ovan för att producera den fullständiga ortogonala basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$ till W.



FIGUR 1. Vektorn $\vec{v}_2$ konstrueras så att den är ortogonal mot $\vec{v}_1$. W_1 är delrummet som spänns upp av $\vec{v}_1$.



FIGUR 2. Vektorn $\vec{v}_3$ konstrueras så att den är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. W_2 är delrummet som spänns upp av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$.

9. **Alla nollskilda delrum till $\mathbb{R}^n$ har en ortonormal bas.**

Om vi föredrar en ortonormal bas kan vi normalisera den ortogonala basen, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$, vilket ger oss en ortonormal bas, $\{\vec{q}_1 = \vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|, \vec{q}_2 = \vec{v}_2/\|\vec{v}_2\|, \ldots \vec{q}_k = \vec{v}_k/\|\vec{v}_k\|\}$.

10. **Uppgift.** Gram-Schmidt's process.

Följande bas är given $\vec{w}_1 = (1, 2)$ och $\vec{w}_2 = (-1, 3)$. Konstruera en ON-bas $\vec{q}_1$ och $\vec{q}_2$.

Svar: $\vec{q}_1 = 1/\sqrt{5}(1, 2)$, $\vec{q}_2 = 1/\sqrt{5}(-2, 1)$

11. **Uppgift.** Tentatal SF1624: Låt $W = \text{im}(A)$ vara bildrummet (kolonnrummet) till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortonormal bas för W.

Svar: $\vec{q}_1 = 1/\sqrt{10}(-1, -1, 2, 2)$, $\vec{q}_2 = 1/\sqrt{590}(9, 19, 12, 2)$