24 november, 2014, Föreläsning 19 och 20

TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

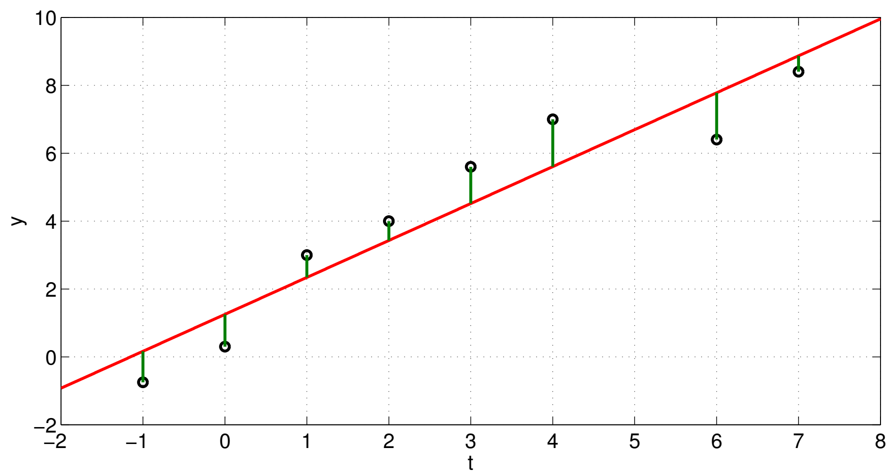
Innehåll:

- Minsta-kvadratmetoden
- Projektionssatsen

1. Minsta-kvadratmetoden - motivation

Inom teknik och vetenskap arbetar man ofta med modellering av data, dvs att koppla ihop mätdata med en formel eller kurva.

Antag att vi har mätt upp ett antal datapunkter $(t_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n$, och vi vill nu anpassa dessa till en modell som i det här fallet är en rät linje, $y = a + bt$.



FIGUR 1. Mätdata är markerat som ringar och den anpassade linjen är heldragen. De lodräta sträckorna är skillnaden mellan uppmätta värden och den anpassade räta linjen.

I de flesta fall kan vi inte få den räta linjen att gå genom alla uppmätta punkter, se Figur 1. Hur ska vi välja a och b i vår modell?

Idén med minsta-kvadratmetoden är att välja a och b sådana att den räta linjen anpassar sig så bra som möjligt. Vi måste definiera vad vi menar med så bra som möjligt.

2. Matematisk beskrivning av minsta-kvadratmetoden

Om vi sätter in våra data i modellen får vi följande överbestämda (fler ekvationer än obekanta) linjära ekvationssystem att lösa för a och b,

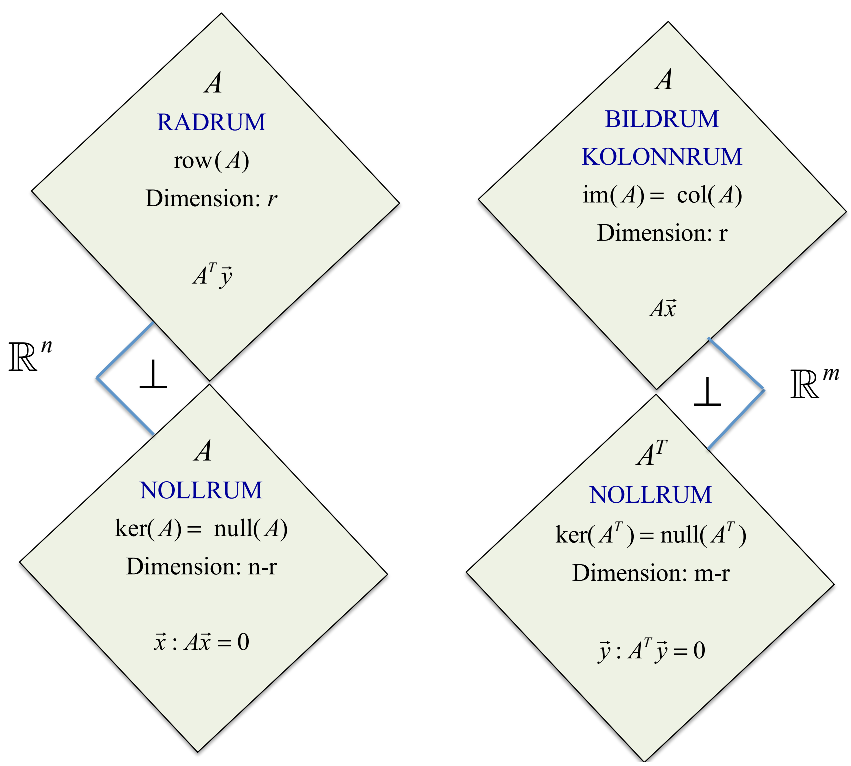
$$\begin{array}{ccccc} a & + & bt_1 & = & y_1 \\ a & + & bt_2 & = & y_2 \\ & \vdots & & & \\ a & + & bt_n & = & y_n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har ingen lösning. Hur går vi vidare?

Saker vi behöver känna till innan vi går vidare.

3. Matrisens fundamentala rum

Detta har vi sett tidigare. En sammanfattning finns i Figur 2.



FIGUR 2. Givet en $m \times n$-matris A med rang r, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ så kan vi definiera följande del/underrum till $\mathbb{R}^m$ respektive $\mathbb{R}^n$. Matrisen A's radrum är ortogonalt mot A's nollrum och A's bildrum (kolonnrum) är ortogonalt mot A^T's nollrum. (Strang-diagram, se Anton s.387)

4. **Uppgift.** Låt W vara ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

a) Om W =ker(A) (i Anton W =null(A)) vad är då $W^\perp$?
b) Om W =im(A) (i Anton W =col(A)) vad är då $W^\perp$?

Lösning: Se sidan 345 i Anton.

5. **Uppgift.** Låt $m \times n$-matrisen A ha full rang

a) Vad är då rang(A)?
b) Vilken dimension har bild/kolonnrummet, im(A) (col(A))?
c) Vilken dimension har nollrummet, ker(A) (null(A))?
d) Vad gäller för lösningen till $A\vec{x} = \vec{0}$?
e) Vad gäller för lösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$ för ett godtyckligt $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$?
f) Om vi vet att $\vec{b}$ ∈im(A) (col(A)) , vad gäller då för lösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$?
g) Är $A^T A$ inverterbar?

Lösning: b), c) se satserna 7.4.1 och 7.4.2 i Anton. d), e), f), se satserna 7.5.6 och 7.5.3 i Anton. g) se sats 7.5.10 i Anton.

6**. Exempel**. Bestäm en bas för kolonnrummet, radrummet och nollrummet till

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 6 & 12 & -3 \\ -2 & 6 & 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Bestäm även rangen.

Lösning: Marisen radreduceras till

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De två nollskilda raderna utgör en bas för radrummet. Första och tredje kolonnen är pivotkolonner så dessa kolonner i den ursprungliga matrisen utgör en bas för kolonnrummet, $[1\ 3\ -2]^T$ och $[2\ 6\ 5]^T$. Nollrummet ges av lösningen till $A\vec{x} = \vec{0}$. Här får vi

$$\vec{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs basen till nollrummet ges av $[3\ 1\ 0\ 0\ 0]^T, [-2\ 0\ -1\ 1\ 0]^T$ och $[3\ 0\ -1\ 0\ 1]^T$. Matrisen har rang 2.

7. Projektionssatsen - ortogonal projektion på generella underrum

Om W är ett underrum till $\mathbb{R}^n$, då kan varje vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ skrivas (på exakt ett sätt) som $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ där $\vec{x}_1$ ligger i W och $\vec{x}_2$ ligger i $W^\perp$.

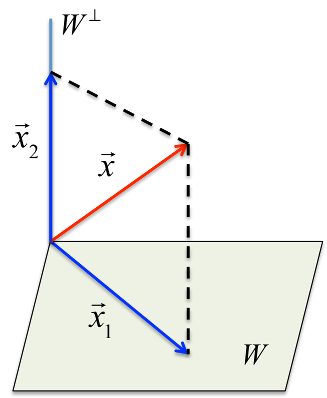
Vektorn $\vec{x}_1 = \text{proj}_W \vec{x}$ och $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 = \text{proj}_{W^\perp} \vec{x}$, se Figur 3.

8. Hur beräknar vi projektionen av $\vec{x}$ på W?

Om W är ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och matrisen M är en matris vars kolonnvektorer är en bas för W då är

$$\text{proj}_W \vec{x} = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{x}$$

för alla kolonnvektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

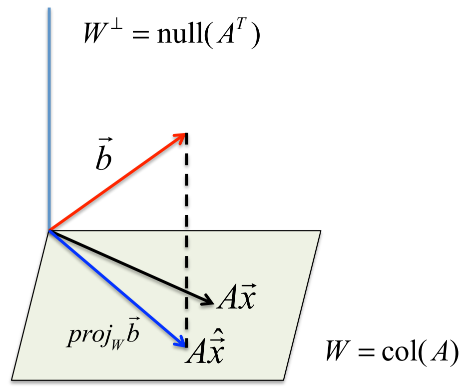


FIGUR 3. Vektorn $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ delas upp i två komponenter med hjälp av ortogonal projektion.

9. **Uppgift.** Hitta den ortogonala projektionen av vektorn $\vec{x} = (1,\ 0,\ 4)$ på planet, W, som ges av ekvationen $x - 4y + 2z = 0$.

10. Minsta-kvadratmetoden - fortsättning

Problemet med vår ursprungliga modell är att det linjära ekvationssystem för konstanterna a och b saknar lösning. Detta illustreras i Figur 4. Där ser vi att högerledet, $\vec{b}$, i modellen inte ligger i A's kolonnrum, vilket är en förutsättning för att lösning ska finnas. Grundidén i minsta-kvadratmetoden är att projicera vektorn $\vec{b}$ ortogonalt på kolonnrummet och sedan lösa systemet $A\vec{x} = \text{proj}_{\text{col}(A)} \vec{b}$. Detta ger oss en lösning $\hat{\vec{x}}$ där avståndet mellan $A\hat{\vec{x}}$ och $\vec{b}$ är det minsta möjliga. (Kortaste avståndet är alltid det vinkelräta.)



Figur 4. Eftersom $\vec{b}$ inte ligger i A's kolonnrum går det inte att hitta en vektor $\vec{x}$ sådan att $A\vec{x} = \vec{b}$. För att lösa problemet projiceras vektorn $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$ ortogonalt på A's kolonnrum och vi får systemet $A\vec{x} = \text{proj}_{\text{col}(A)}\vec{b}$. Detta kommer att ge oss en minsta-kvadratlösning $\hat{\vec{x}}$.

Lösningen, $\hat{\vec{x}}$, är en minsta-kvadratlösning till $A\vec{x} = \vec{b}$. Att bestämma minsta-kvadratlösningen är detsamma som att lösa den så kallade **normalekvationen**

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}.$$

Om A har full rang, har normalekvationen en **unik** lösning,

$$\hat{\vec{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

Notera att vi inte explicit behöver bestämma projektionen av $\vec{b}$ på col(A) för att bestämma $\hat{\vec{x}}$.

11. Hur stort blir felet i approximationen av $\vec{b}$?

När vi använder den ortogonala projektionen av $\vec{b}$ på col(A) så kommer avståndet $\|\vec{b} - A\hat{\vec{x}}\|$ vara det minsta möjliga. Om vi låter $a = \hat{x}_1$ och $b = \hat{x}_2$ där $\hat{x}_1$ och $\hat{x}_2$ är elementen i $\hat{\vec{x}}$ så får vi minsta-kvadratfelet (kallas även minsta-kvadratsumman)

$$\|\vec{b} - A\hat{\vec{x}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bt_i))^2}.$$

Här ser vi att vi har minimerat summan av kvadraterna på avvikelserna. Avvikelserna är de lodräta gröna sträckorna i Figur 1.

12. **Uppgift.** Visa att felvektorn $\vec{b} - A\hat{\vec{x}}$ är ortogonal mot $\text{col}(A)$ om $\hat{\vec{x}}$ är en minsta-kvadratlösning till $A\vec{x} = \vec{b}$.

13. **Uppgift.** Vi vill bestämma längdutvidgningskoefficienten, λ, för en metall som upphettas. Stången upphettades och för olika värden på temperaturen mättes längden på stången.

Temp (C)	20.0	25.5	30.2	36.8	41.0
Längd (cm)	8.78	8.93	9.06	9.25	9.40

a) Ställ upp normalekvationen då sambandet mellan längd, L, och temperatur, T, ges av $L(T) = L_0 + L_1 T$.

b) Lös normalekvationen med full noggrannhet. Detta ger oss värden på L_0 och L_1. Beräkna λ med hjälp av sambandet $L_1 = \lambda L_0$. Vad blir λ?

c) Istället för att ställa upp och lösa normalekvationen, lös $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ direkt med backslash. Får du samma lösning som i b)?

d) Lös normalekvationen igen, men nu med elementen i normalekvationerna avrundade till tre korrekta siffror. Beräkna λ. Blir det någon skillnad ?

Det visar sig att normalekvationerna ofta blir illa-konditionerade. Det vill säga litet fel in ger stort fel ut. Ett sätt att komma ifrån detta är att lösa normalekvationerna med hjälp av QR-faktorisering.