November 19, 2014. Föreläsning 18.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Koordinater i olika bas.
- Matriser av linjära funktioner i olika bas

1. **Proposition.** Låt $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$. Då för alla vektorer $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ i $\mathbb{R}^m$, finns det en unik linjär funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så att $f(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, f(\vec{v}_2) = \vec{w}_2, \dots, f_(\vec{v}_n) = \vec{w}_n$.

2. **Uppgift.** Finnes det en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ så att:

$$f(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hur många sådana avbildningar finns det? Bestäm standardmatriser som motsvarar dem. Bestäm standardmatrisen till avbildning $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller:

$$g(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad g(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. **Definition.** Låt $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ vara en bas till ett delrum W i $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\vec{v}$ i W kan skrivas på ett unik sätt som en linjär kombination:

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$ kallas för koordinaterna till $\vec{v}$ i bas $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Om $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ är en bas till W, vi skriver också:

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

för att beteckna koordinaterna av $\vec{v}$ i bas $\mathcal{B}$. Koordinaterna av $\vec{v}$ i bas $\mathcal{B}$ uppfyller följande likheten:

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_k][\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v}$$

4. Vektorerna $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas av $\mathbb{R}^3$ som kallas för standarda basen. Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ i den standard bas.

5. Vektorerna: $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ också bildar en bas av $\mathbb{R}^3$. I den bas vektor $v = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. Betrakta vektorer $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$. Låt $V = \text{Span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ är en bas till V. Vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$, som ligger i V har följande koordinaterna i $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

7. **Uppgift.**

(1) Bevisa att följande vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjär oberoende:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) Låt $\vec{v}$ vara en vektor i $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ som i bas $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ har koordinaterna $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hitta $\vec{v}$.

(3) Undersök om vektor $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ligger i $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. I så fal hitta koordinaterna av $\vec{w}$ i bas $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

8. **Proposition.** Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Följande är ekvivalenta:

(1) $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ är en bas till $\mathbb{R}^n$.
(2) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ är linjär oberoende.
(3) $\text{span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \mathbb{R}^n$.
(4) matrisen $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ är inverterbar.

9. Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$. Det betyder att $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ är inverterbar. För att hitta koordinaterna av $\vec{v}$ i bas $\mathcal{V}$ måste vi lösa systemet:

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]X = \vec{v}$$

dvs. koordinaterna av $\vec{v}$ i bas $\mathcal{V}$ ges av $[\vec{v}]_{\mathcal{V}} = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_n)^{-1}\vec{v}$.

Om $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ är två baser i $\mathbb{R}^n$ då:

$$[\vec{v}]_{\mathcal{V}} = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_n]^{-1}\vec{v}$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{W}} = [\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n]^{-1}\vec{v} = [\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n]^{-1}[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_n][\vec{v}]_{\mathcal{V}}$$

10**. Definition.** Låt U vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ vara två bas till U. Bas byte matris från bas $\mathcal{V}$ till $\mathcal{W}$ är en $k \times k$ matris $T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}$ så att, for alla vektoer $\vec{u}$ i U:

$$T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}[\vec{u}]_{\mathcal{V}} = [\vec{u}]_{\mathcal{W}}$$

11**. Proposition.**

$$T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}} = [[\vec{v}_1]_{\mathcal{W}} \cdots [\vec{v}_k]_{\mathcal{W}}]$$

12**. Proposition.** Låt U vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ vara två bas till U.

(1) $T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}$ är den enda matris så att $T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}[\vec{v}]_{\mathcal{V}} = [\vec{v}]_{\mathcal{W}}$.
(2) $T_{\mathcal{W}\to\mathcal{V}} = (T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}})^{-1}$.
(3) $T_{\mathcal{W}\to\mathcal{U}}T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}} = T_{\mathcal{V}\to\mathcal{U}}$.

13**. Uppgift.**

(1) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

(2) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

(3) Antar att $[\vec{v}]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Hitta $[\vec{v}]_{\mathcal{W}}$.
(4) Antar att $[\vec{w}]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Hitta $[\vec{w}]_{\mathcal{V}}$.
(5) Hitta basbyte matris $T_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}$.
(6) Hitta basbyte matris $T_{\mathcal{W}\to\mathcal{V}}$.

14. **Definition.** Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Följande matris kallas för matrisen till f i bas $\mathcal{B}$:

$$[f]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} [f(\vec{v}_1)]_{\mathcal{V}} & [f(\vec{v}_2)]_{\mathcal{V}} & \cdots & [f(\vec{v}_n)]_{\mathcal{V}} \end{bmatrix}$$

15. **Proposition.** Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.

(1) For varje vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ finns det följande likheten:

$$[f(\vec{v})]_{\mathcal{V}} = [f]_{\mathcal{V}}[\vec{v}]_{\mathcal{V}}$$

(2) $[f]_{\mathcal{V}}$ är den enda matris så att $[f(\vec{v})]_{\mathcal{V}} = [f]_{\mathcal{V}}[\vec{v}]_{\mathcal{V}}$.

16. **Proposition.** Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ och $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ vara baser i $\mathbb{R}^n$. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning med motsvarande standard matris A. Då:

$$[f]_{\mathcal{V}} = S_{\mathcal{W}\to\mathcal{V}}[f]_{\mathcal{W}}S_{\mathcal{V}\to\mathcal{W}}$$

17. **Uppgift.** Låt $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^2$ (bevisa att $\mathcal{B}$ är en bas). Låt $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3y \end{bmatrix}$ vara en linjär avbildning. Hitta $[f]_{\mathcal{B}}$.

18. **Uppgift.** Låt $\mathcal{V} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ vara och $\mathcal{W} = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ vara baser i $\mathbb{R}^2$. Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning så att $[f]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Bestäm f och $[f]_{\mathcal{W}}$.