

November 3, 2014. Föreläsning 12.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Ortogonala matriser.
- Matriser och linjära funktioner.

1. **Definition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.

- f bevarar längden om $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ för alla \vec{v} i \mathbb{R}^k .
- f bevarar ortogonalitet om $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = 0$ för alla \vec{v} och \vec{w} i \mathbb{R}^k så att $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- f bevarar vinklar om vinkeln mellan $f(\vec{v})$ och $f(\vec{w})$ är lika med vinkeln mellan \vec{v} och \vec{w} för alla \vec{v} och \vec{w} i \mathbb{R}^k .
- f bevarar skalärprodukt om $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$ för alla \vec{v} och \vec{w} i \mathbb{R}^k .

2. **Definition.** En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för **ortogonal** om $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ för alla \vec{v} (den bevarar längden).

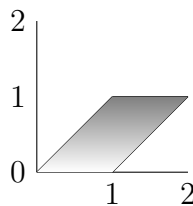
3. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.

- f bevarar längden om och endast om f bevarar skalärprodukt.
- Om f bevarar längden, då bevarar f ortogonalitet och vinklar.

4. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

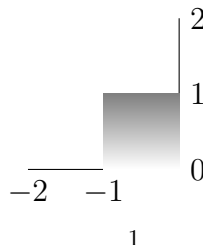
- Bevisa att f bevarar ortogonalitet och vinklar.
- Bevisa att f är inte ortogonal.

5. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär funktion som avbildar enhetskvadraten på en parallelogram enligt figuren:



- Bestäm standardmatrisen till f .
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

6. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär funktion som avbildar enhetskvadraten på



en parallelogram enligt figuren:

- Bestäm standardmatrisen till f .
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

7. Uppgift. Låt \vec{v} vara en vektor i \mathbb{R}^3 . Antar att $\|\vec{v}\| = 1$. Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara rotation runt linjen $\text{span}(\vec{v})$ i α radianer.

- Bestäm standardmatrisen till f .
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?