

Oktober 16, 2014. Föreläsning 11.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Linjära funktioner: nollrum, bildrum, rang.
- sammansättning av linjära funktioner och matriser

1. **Nollrum, bildrum, och rang av en linjär avbildning.** Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = [\vec{C}_1 \quad \vec{C}_2 \quad \cdots \quad \vec{C}_n]$$

där $\vec{C}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ är i -te kolon till A .

- **Rang** av f är lika med rangen av A .
- **Nollrummet** till f är delmängd av \mathbb{R}^k som består av alla vektorer \vec{v} i \mathbb{R}^k , så att $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Nollrummet till f betecknas med $\ker(f)$. Nollrummet består av alla vektorer \vec{v} som uppfyller $A\vec{v} = \vec{0}$. Nollrum till f består av lösningar till:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Bildrummet** till f är delmängd av \mathbb{R}^n som består av alla vektorer \vec{b} i \mathbb{R}^n , så att $\vec{b} = f(\vec{v})$ för någon vektor \vec{v} i \mathbb{R}^k . Bildrummet betecknas med $\text{im}(f)$. Det

betyder att en vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ i bildrummet till f kan skrivas som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Altså:

$$x_1 \vec{C}_1 + x_2 \vec{C}_2 + \cdots + x_n \vec{C}_n = \vec{b}$$

Det betyder att bildrummet till f ges av $\text{span}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_n)$:

$$\text{im}(f) = \text{span}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_n)$$

2. **Proposition.** Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Nollrummet $\ker(f)$ är ett delrum i \mathbb{R}^k och bildrummet $\text{im}(f)$ är ett delrum i \mathbb{R}^n .

3. **Proposition** Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär funktion som ges av matrisen $A = [f(\vec{e}_1) \ f(\vec{e}_2) \ \dots \ f(\vec{e}_k)]$.

- f är one to one om och endast om $\ker(f) = 0$.
- f är onto om och endast om $\text{span}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k)) = \mathbb{R}^n$, dvs om och endast om rangen till A är lika med n .

4. **Uppgift.** Bevisa Proposition 2 och 3.

5. **Uppgift.** Betrakta en linjär funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ som ges av:

$$f \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 - 4v_3 \\ v_2 + 5v_3 \\ 3v_1 \\ -v_1 - v_2 + 10v_3 \end{bmatrix}$$

Bestäm nollrummet, bildrummet, och rangen till f . Hitta en bas till $\ker(f)$, $\text{im}(f)$ och

bestäm $\dim(\ker(f))$ och $\dim(\text{im}(f))$. Avgör om $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är i bildrummet till f . Avgör

om f är one to one. Avgör om f är onto.

6. **Uppgift.** Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär funktion som ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm nollrummet, bildrummet, och rangen till f . Hitta en bas till $\ker(f)$, $\text{im}(f)$ och bestäm $\dim(\ker(f))$ och $\dim(\text{im}(f))$. Avgör om f är one to one. Avgör om f är onto.

7. Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara funktioner. **Sammanfattning** av f och g är en funktion $gf: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ som avbildar vektor \vec{v} i \mathbb{R}^k till vektor $g(f(\vec{v}))$ i \mathbb{R}^m . Vi ofta använder följande graf föreställning av en sammansättning:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & gf & & \end{array}$$

Om f och g är linjär, då, gf är också linjär.

8. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för **inverterbar** om för varje vektor \vec{u} i \mathbb{R}^n det finns bara en vektor \vec{v} i \mathbb{R}^n som avbildas till \vec{u} , dvs $f(\vec{v}) = \vec{u}$. Vi kan använda detta för att definiera inversen till f . Den är en funktion $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ som avbildar en vektor \vec{u} till en vektor \vec{v} om f avbildar \vec{v} till \vec{u} , dvs, $f^{-1}(\vec{u}) = \vec{v}$ om och endast om $f(\vec{v}) = \vec{u}$.

9. Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara linjära funktioner som ges av matriser A och B , dvs, $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ och $g(\vec{w}) = B\vec{w}$.

Fråga: bestäm matrisen till sammansättningen $gf: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Den borde vara en $m \times n$ matris.

Kolonnerna till matrisen till gf ges va:

$$gf(\vec{e}_i) = B(A\vec{e}_i) = (BA)\vec{e}_i$$

Vi kan konstatera:

10. **Proposition.** Låt $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara linjära funktioner som ges av matriser A och B . Matrisen till gf ges av matris multiplikation BA .

11. **Proposition.** Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär funktion som ges av matrisen A . Då f är inverterbar om och endast om A är inverterbar. Om f är inverterbar, då f^{-1} är också linjär och den ges av matrisen A^{-1} :

$$f^{-1}(\vec{v}) = A^{-1}\vec{v}$$

12. **Slogan:** Vi identifierar linjära avbildningar med matriser. Genom denna identifikation, sammansättning, addition, subtraktion, inverterbara funktioner, inversen, motsvarar matris multiplikation, addition, subtraktion, inverterbara matriser, inversen. Identitet linjär avbildning motsvarar identitet matris.

13. $h(gf) = (hg)f$ som motsvara $C(BA) = (CB)A$. $(h+g)f = hf + gf$ som motsvarar $(C+B)A = CA + BA$. $\text{id} \circ f = f$ och $f \circ \text{id}$ som motsvarar $IA = A$ och $AI = A$, där I betecknar identitet matrisen.

14. **Uppgift.** Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en vridning i α radianer och $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara projektion på linjen $2x - 4y = 0$. Hitta standard matris till $f \circ g$ och $g \circ f$.

15. **Uppgift.** Betrakta följande linjär avbildning $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ y - z \\ x + z \end{bmatrix}$$

Hitta matrisen till f . Undersök om f är inverterbar, och i så fall hitta inversen till f .

16. **Uppgift** Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en linjär funktion så att:

$$f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hitta matrisen till f och bestäm om f är inverterbar.

17.

	linjära funktioner	matriser
	$f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$	$n \times k$ matris $[f(\vec{e}_1) \ \cdots \ f(\vec{e}_k)]$
	$A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ avbildar \vec{x} till $A\vec{x}$	$n \times k$ matris A
nollrum	$\ker(f) = \{ \vec{v} \text{ i } \mathbb{R}^k \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \}$	lösningar till $A\vec{x} = \vec{0}$
	one to one	$A\vec{x} = \vec{0}$ har bara $\vec{0}$ för lösning
bildrum	$\text{im}(f) = \{ f(\vec{v}) \text{ i } \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \text{ i } \mathbb{R}^k \}$	$\text{span}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_k))$
bildrum	$\text{im} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \right)$	$\text{span} \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} \right)$
	onto	$\text{rang}(A) = n$
	sammansättning $\mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$ $\quad \quad \quad \curvearrowright \quad gf$	matris multiplikation A är $n \times k$ matris och B är $m \times n$ matris BA är $m \times k$ matris
	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är inverterbar	$n \times n$ matris $[f(\vec{e}_1) \ \cdots \ f(\vec{e}_n)]$ är inverterbar.
	$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är inverterbar	$n \times n$ matris A är inverterbar.