Oktober 14, 2014. Föreläsning 10.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Baser.
- linjära funktioner.

1. **Definition.** Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. En bas till W består av linjär oberoende vektorer $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ så att $\text{span}(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k) = W$.

Alstå, $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ är en bas till W om och endast om varje vektor $\vec{w}$ i W kan skrivas på ett unik sätt som en linjär kombination:

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

Till exempel, vektorerna $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ bildar en bas till $\mathbb{R}^n$. De är linjär oberoende och spänner $\mathbb{R}^n$. $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ kallas för standardbasen till $\mathbb{R}^n$.

2. **Proposition.** Låt W vara ett delrum i $\mathbf{R}^n$.

(1) Alla baser till W har samma antalet av vektorer.
(2) En bas till W består av minsta antal av vektorer som spanner W.
(3) En bas består av den största antal av linjär oberoende vektorer som ligger i W.
(4) Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{v}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. De bildar en bas till $\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ om och endast om de är linjär oberoende, dvs om följande matris har rang k:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_3 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

(5) Låt $W = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$. Då vi kan välja en bas bland vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.
(6) Låt $W = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$. De vektorerna bland $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ som motsvarar pivot kolonnerna i matrisen $\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_3 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$ bildar en bas till W.
(7) Antalet av vektorer i an bas till $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ är lika med rangen till $\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_3 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix}$.

3. **Definition.** Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. Antal av vektorer i en bas till W kallas för dimension av W och betecknas med $\dim(W)$.

Till exempel $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

4. **Uppgift.** Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$. Hitta en bas till $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ och bestäm $\dim(\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3))$.

5. **Proposition.** Låt V och W vara delrum i $\mathbb{R}^n$. Antar att V är delrum i W. Då:

- $\dim(V) \leq \dim(W) \leq n$.
- $V = W$ om och endast om $\dim(V) = \dim(W)$.
- $W = \mathbb{R}^n$ om och endast om $\dim(W) = n$.

6. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(1) Bildar vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ en bas till $\mathbf{R}^3$?
(2) Bildar vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ en bas till $\mathbf{R}^3$?
(3) Bildar vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ en bas till $\mathbf{R}^3$?

7. Låt $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Hur kan vi hitta en bas till $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k)$. Vi kan använda följande algoritm:

(1) om $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, ta $\vec{u}_1 := \vec{v}_1$ och sätt index $= 2$;
(2) om $\vec{v}_1 = \vec{0}$, kasta bort den;
(3) om $\vec{v}_2$ är inte parallell till $\vec{u}_1$, ta $\vec{u}_{\mathrm{index}} := \vec{v}_2$ och sätt index $= 3$;
(4) om $\vec{v}_2$ är parallell till $\vec{u}_1$, kasta bort den;
(5) om $\vec{v}_3$ ligger inte i $\mathrm{span}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, ta $\vec{u}_{\mathrm{index}} := \vec{v}_3$ och sätt index $= 4$;
(6) om $\vec{v}_3$ ligger i $\mathrm{span}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$, kasta bort den;
(7) fortsätt k-gånger.

8. **Uppgift.** Skriv matlab kod till sektion 7.

9. Kom ihåg att an funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ är en tillordning som till varje vektor $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^k$ ordnar en vektor $f(\vec{v})$ i $\mathbb{R}^n$.

För att prata om linjära funktioner måste vi börja komma ihåg om funktioner i allmänhet. Till exempel identitet funktion $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avbildar varje vektor $\vec{v}$ till $\vec{v}$, dvs. $\mathrm{id}(\vec{v}) = \vec{v}$. Noll funktion $0\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ avbildar alla vektorer i $\mathbb{R}^k$ till noll vektor $\vec{0}$ i $\mathbb{R}^n$.

An funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ kallas för **one to one** om två olika vektorer avbildas till två olika vektorer, dvs det finns inte två olika vektorer $\vec{v} \neq \vec{w}$ i $\mathbb{R}^k$ så att $f(\vec{v}) = f(\vec{w})$.

An funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ kalas för **onto** om alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som $f(\vec{v})$ för någon vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$.

10. Vilka metoder har vi för att beskriva en funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$? Den enklaste metod är att använda matriser. Låt A vara an $n \times k$ matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Betrakta en funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ som avbildar en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$ till vektor $A\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Den kan skrivas:

$$f \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1k}v_k \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2k}v_k \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nk}v_k \end{bmatrix}$$

11. **Definition.** En funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ är linjär om det finns en $n \times k$ matris A så att $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ för varje vektor $\vec{v}$.

12. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ vara 2×3 matris. Den kan användas för att beskriva en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$f \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 + 4v_2 - v_3 \\ 4v_2 - 2v_3 \end{bmatrix}$$

13. Kan an linjär avbildning $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ges av två olika $n \times k$ matriser A och B? Kom ihåg:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \vec{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt oss skriva $n \times k$ matrisen A som $A = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_k \end{bmatrix}$ där $\vec{C}_i$ är i-te kolumnen av A, dvs:

$$\vec{C}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

Märka att

$$A\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = v_1\vec{C}_1 + v_2\vec{C}_2 + \cdots + v_k\vec{C}_k$$

Altså:

$$A\vec{e}_1 = \vec{C}_1,\ A\vec{e}_2 = \vec{C}_2, \ldots, A\vec{e}_k = \vec{C}_k$$

Vi kan konstatera att om $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ ges av två matriser A och B, då $A = B$ för att:

$$\text{första kolumnen av } A = Ae_1 = f(e_1) = Be_1 = \text{första kolumnen av } B$$

$$\text{i-te kolumnen av } A = Ae_i = f(e_i) = Be_i = \text{i-te kolumnen av } B$$

14. **Slogan.** Linjära avbildningar mellan $\mathbb{R}^k$ och $\mathbb{R}^n$ kan identifieras med $n \times k$ matriser.

15. **Uppgift.** Är följande avbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linjär?

$$f\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 - 4v_3 \\ v_2 + 5v_3 \\ 3v_1 \\ -v_1 - v_2 + 100v_3 \end{bmatrix}$$

Hitta matrisen till f.

16. Hur kan vi undersöka om en funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ är linjär? Notera att om $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ är linjär, då:

- $f(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v} + \vec{w}) = Av + Aw = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$, altså om vi har två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vi kan först addera dem och sedan använda f eller vi kan först använda f och sedan addera resultat. Dem två transformationer ger samma vektor.
- $f(t\vec{v}) = A(t\vec{v}) = tA\vec{v} = tf(\vec{v})$

17. **Proposition.** En funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ är linjär om och endast om:

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$;
- $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$;
- $f(t\vec{v}) = tf(\vec{v})$.

18. **Uppgift.** Är följande funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linjär:

$$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_4 + 3 \\ x_1 - x_2 - x_2 + 2x_4 \\ x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

19. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara linjär. Låt $\vec{C}_i = f(\vec{e}_i)$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Låt A vara $n \times k$ matrisen som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_k) \end{bmatrix}$$

Då $f(\vec{v}) = A\vec{v}$.

20. **Definition** Låt $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara linjär. Matrisen:

$$\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_k) \end{bmatrix}$$

kallas för standardmatrisen till f.

21. **Parametrisering av en linje i rummet.** Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vara en funktion som avbildar t till vektor $t\vec{v}$, dvs $f(t) = \begin{bmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{bmatrix}$. Paramterisering av en linje är one to one men inte onto. Den har följande matris:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

22. **Ortogonal projektion på linjen.** Geometriskt beskrivning: Ortogonal projektion av planet på en linje L är en funktion $\mathrm{proj}_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar en vektor $\vec{v}$ till ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på linjen L. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ vara en enhets vektor som är parallell till linjen. Enhets betyder att den har längden 1, dvs., att $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Kom ihåg att $\mathrm{proj}_L(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$, dvs. $\mathrm{proj}_L \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (u_1v_1 + u_2v_2) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. Projektionen proj_L har matrisen:

$$[\mathrm{proj}_L(\vec{e}_1) \;\; \mathrm{proj}_L(\vec{e}_2)] = [(\vec{e}_1\cdot\vec{u})\vec{u} \;\; (\vec{e}_2\cdot\vec{u})\vec{u}] = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix}$$

där $1 \geq a \geq 0$.

23. **Spegling.** Geometriskt beskrivning: Spegling i en linje L i planet är en funktion $\mathrm{ref}_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar vektor $\vec{v}$ till $2\mathrm{proj}_L(\vec{v}) - \vec{v}$. Spegling är linjär funktion. Om $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ är enhets riktning vektor av linjen, då ref_L har matrisen:

$$[\mathrm{ref}_L(\vec{e}_1) \; \mathrm{ref}_L(\vec{e}_2)] = [2(\vec{e}_1\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{e}_1 \;\; 2(\vec{e}_2\cdot\vec{u})\vec{u} - \vec{e}_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2u_1^2 - 1 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & 2u_2^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & u_2^2 - u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

24. **Vridning.** Geometriskt beskrivning: vridning av planet i α radianer är en funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar en vektor v till en vektor $T(v)$ så att $|v| = |T(v)|$ och vinkeln

mellan v och $T(v)$ är lika med α. Vridning är en linjär avbildning som har följande matris:

$$[T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Vridningen av planet i α radianer är one to one och onto. Altså den är inverterbar. Inversen ges av vridningen i $-\alpha$ radianer.