

## TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

Innehållet:

- Span (linjära höljet) av vektorer i  $\mathbb{R}^n$ ;
- Delrum i  $\mathbb{R}^n$ ;

1. **Definition.** Låt  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) Span (linjära höljet) av  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  är den delmängd av  $\mathbb{R}^n$  som består av alla linjärkombinationer  $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \dots + t_k\vec{v}_k$  där  $t_i$  är ett tal. Span av  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  betecknas med  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ .
- (2) Vi säger att  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  genererar eller *spänner upp*  $\mathbb{R}^n$  om  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \mathbb{R}^n$ . Alltså  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  genererar  $\mathbb{R}^n$  om och endast om alla vektorer i  $\mathbb{R}^n$  kan skrivas som linjärkombinationer av  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ .

2. Låt

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{v}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

En vektor  $\vec{w}$  ligger i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$  (kan skrivas som linjärkombination av  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ ) om och endast om följande system har en lösning,

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \end{array} \right]$$

Om  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$  är en lösning, då är  $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k$ .

Kom ihåg att systemet har en lösning för alla  $\vec{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  om och endast om rangen =

$n$ .

3. **Uppgift.** Kan vektorerna  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  och  $\vec{v}_3$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

skrivs som en linjärkombination av vektorerna  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$ ,  $\vec{u}_4$  om

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. **Proposition.**

- (1)  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \mathbb{R}^n$  ( $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  genererar  $\mathbb{R}^n$ ) om och endast om rangen =  $n$ .
- (2) Om  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \mathbb{R}^n$ , då är  $k \geq n$ .

5. **Uppgift.** Fundera på följande

- Kan 3 vektorer generera  $\mathbb{R}^4$ ?
- Kan 5 vektorer generera  $\mathbb{R}^4$ ?
- Är det sant att 5 olika vektorer i  $\mathbb{R}^4$  alltid genererar  $\mathbb{R}^4$ ?

6. **Span av en vektor.**

Låt  $\vec{v}$  vara en vektor i  $\mathbb{R}^m$ . Det finns två möjligheter för  $\text{Span}(\vec{v}) = \{t\vec{v} \mid t \text{ är ett tal}\}$ .

- (1)  $\text{Span}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$
- (2) Om  $\vec{v} \neq \vec{0}$  då är  $\text{Span}(\vec{v})$  linjen genom origo med riktning  $\vec{v}$

7. **Span av två vektorer.**

Låt  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^m$ . Det finns tre möjligheter för  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{t\vec{v} + s\vec{w} \mid t, s \text{ är tal}\}$ .

- (1)  $\text{Span}(\vec{0}, \vec{0}) = \{\vec{0}\}$
- (2) Om  $\vec{v} \neq \vec{0}$  och om  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  är parallella dvs  $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ , då är
 
$$\text{Span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{t\vec{v} + s\vec{w} = t\vec{v} + s\lambda\vec{v} = (t + \lambda s)\vec{v} \mid s, t \text{ är tal}\} = \text{Span}(\vec{v})$$
 linjen genom origo med riktning  $\vec{v}$ .

- (3) Om  $\vec{v} \neq \vec{0}$  och  $\vec{w} \neq \vec{0}$  och  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  inte är parallella, då kallas  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$  för ett **plan** i  $\mathbb{R}^m$ .

8. **Uppgift.** Låt  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  och  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Undersök om vektorn  $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$  ligger i  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ .

9. **Uppgift.** Undersök om  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , och  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  genererar  $\mathbb{R}^3$ .

Följande är viktiga egenskaperna hos  $\text{Span}$

10. **Proposition.** Betrakta  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$  i  $\mathbb{R}^n$ .

- (1)  $\vec{0}$  ligger i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ ;
- (2) Om  $\vec{v}, \vec{w}$  är i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$  då är  $\vec{v} + \vec{w}$  i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ ;
- (3) Om  $\vec{v}$  är i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$  då är  $t\vec{v}$  i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$  där  $t$  är ett tal.

11. **Def.** En delmängd  $V$  i  $\mathbb{R}^n$  kallas för delrum om:

- (1)  $\vec{0}$  ligger i  $V$ ;
- (2) om  $\vec{v}, \vec{w}$  är i  $V$  då  $\vec{v} + \vec{w}$  är i  $V$ ;
- (3) om  $\vec{v}$  är i  $V$  då  $t\vec{v}$  är i  $V$  där  $t$  är ett tal.

Exempelvis om  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  är vektorer i  $\mathbb{R}^n$ , då är  $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$  ett delrum i  $\mathbb{R}^n$ .

12. **Proposition.** Alla delrum i  $\mathbb{R}^n$  kan skrivas som  $\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ , där  $k \leq n$ .

13. En delmängd av  $\mathbb{R}^n$  som består av alla lösningar till:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3k}x_k & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}x_k & = & b_n \end{array}$$

är ett delrum i  $\mathbb{R}^n$  om och endast om  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ . Det betyder att lösningarna till ett homogent system bildar ett delrum. Lösningarna till ett icke-homogent system bildar inte ett delrum.

14. Betrakta  $W = \text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  i  $\mathbb{R}^n$ . Låt  $\vec{v}$  vara en vektor i  $\mathbb{R}^n$ . Två frågor att fundera på

- (1) Kan  $\vec{v}$  skrivas som linjär kombination av  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ , dvs, ligger  $\vec{v}$  i  $\text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ ?
- (2) Låt  $\vec{v}$  vara i  $\text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ . På hur många olika sätt kan  $\vec{v}$  skrivas som en linjär kombination av  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ .