KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om avståndsformeln och cirkelns ekvation.

Under detta pass kommer ni att undersöka några viktiga begrepp inom den analytiska geometrin, dvs den gren av geometrin där man använder sig av koordinatsystem för att beskriva geometriska objekt och bestämma deras egenskaper. Eftersom koordinaterna beskriver objekten med hjälp av *tal*, kan man med lämpliga *beräkningar* bestämma olika egenskaper hos objekten. Den idé går tillbaka till René Descartes (Renatus Cartesisus), 1596 - 1650.

Det är viktigt at rita figurer som tydliggör betecckningar och resonemang, tänk på det när du löser uppgifterna nedan.

1. Avstånd i planet.

Uppgift 1. Använd Pytagoras Sats för att beräkna avståndet mellan de två punkter i planet som har koordinater $(-1, 1)$ respektive $(2, 6)$.

Uppgift 2. Härled utgående ifrån Pytagoras Sats ett uttryck för avståndet mellan två punkter i planet med kooridnater (x_1, y_1) respektive (x_2, y_2).

Uppgift 3. Beräkna längden av sidorna i triangeln vars hörn har koordinater $(1, 2)$, $(3, -1)$ respektive $(-2, 1)$ genom att använda den avståndsformel du härledde i förra uppgiften.

Uppgift 4. Tillämpa nu din avståndsformel för att uttrycka avståndet mellan två godtyckliga punkter på x-axeln. Teckna sedan också detta avstånd med hjälp av absolutbeloppstecken.

Uppgift 5. Bevisa, utan att hänvisa till avståndstolkningen, att

$$\sqrt{x^2} = |x|\,, \quad \text{för alla reella tal } x.$$

2. Cirkelns ekvation.

Definition. En cirkel i planet med medelpunkt (a, b) och radie r definieras som mängden av alla punkter (x, y) som befinner sig på avstånd r ifrån medelpunkten (a, b) .

Uppgift 6. Övertyga dig om att denna defintion av en cirkel motssvarar det du intuitivt vill kalla en cirkel.

Definitionen är alltså ett villkor som bestämmer vilka punkter (x, y) som ska höra till cirkeln. Detta villkor kan också skrivas som en ekvation i (x, y); cirkeln består av precis de punkter vars koordinater (x, y) uppfyller ekvationen.

Uppgift 7. Härled med hjälp av avståndsformeln ekvationen för en cirkel med radie r och medelpunkt (a, b).

Uppgift 8. a) Ange ekvationen för den cirkel C som har radie 11 och medelpunkt i $(10, -2)$.

b) Avgör om origo ligger inuti, på eller utanför cirkeln C.

c) Ange en olikhet som är uppfylld precis av de punkter som
- ligger strikt inuti (dvs inuti i men inte på) cirkeln C;
- inuti eller på cirkeln C ;
- strikt utanför cirkeln C.

Exempel. Ekvationen

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6$$

beskriver en cirkel med medelpunkt $(1, -2)$ och radie $\sqrt{6}$. Genom att utveckla vänster led och sedan förenkla kan denna ekvation också skrivas

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1.$$

Om vi istället är givna den senare ekvationen, och vill förstå hur dess lösningsmängd ser ut kan vi genom att kvadratkomplettera försöka ta oss till standardformen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,

$$\begin{gathered} x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1 \iff \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 1 + 1 + 4 \iff \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6, \end{gathered}$$

och på så sätt se att det lösningsmängden faktiskt är en cirkel och avläsa medelpunkten till $(1, -2)$ och radien till $\sqrt{6}$.

Uppgift 9. Skissera och beskriv med ord lösningsmängden till

a) ekvationen $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 11$
b) ekvationen $2x^2 + 12x + 2y^2 - 16y = 22$
c) olikheten $-9 < x^2 + 6x + y^2 - 8y < 11$
d) olikheten $-9 \leq x^2 + 6x + y^2 - 8y \leq 11$
e) ekvationen $x^2 - 2x + y^2 = -1$
f) olikheten $x^2 - 2x + y^2 < -1$

3. Avstånd i rummet

Uppgift 10. Om vi inför ett rätvikligt koordinatsystem i i det tredimensionella rummet, med samma längdskala på alla tre axlarna, kommer avståndet d mellan två punkter (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) att ges av

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bevisa detta!

Uppgift 11. Beskriv med ord de geometriska objekt som definieras av
a) ekvationen $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 9$;
b) olikheten $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + z^2 \leq 9$

4. Ellipser och hyperblar

I Uppgift 8 härledde du ekvationen för en cirkel i planet med given radie och medelpunkt. Vi ska nu avsluta denna workshop med att studera några andra liknande ekvationer.

Uppgift 12. Undersök vilka geometriska objekt som definieras av följande ekvationer och olikheter (det vill säga beskriv mängden av de talpar (x, y) som uppfyller respektive villkor). Använd gärna en grafritande räknare eller motsvarande.

a) $x^2 + 4y^2 = 16$ b) $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ c) $\dfrac{(x-3)^2}{4^2} + \dfrac{(y+1)^2}{2^2} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} \leq 1$ e) $x^2 - y^2 = 1$ f) $\dfrac{y^2}{2^2} - x^2 = 4.$

Läs nu i avsnittet *Equations of lines and curves* på sidorna 74 - 75 i *What is mathematics?*. Vad kallas de kurvor du studerade i uppgift 13?

Uppgift 13. Skissera och beskriv med ord lösningsmängden till ekvationerna
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$
b) $4x^2 - 9y^2 = 36$

c) $-4x^2 - 9y^2 = 36$
d) $-4x^2 + 9y^2 = 36$

Uppgift 14. Beskriv och skissera de punkter i planet som uppfyller följande olikheter
a) $x^2 + 2y^2 < 3$
b) $x^2 + 2y^2 \leq 3$
c) $x^2 + 2y^2 > 3$