17 september, 2014, Föreläsning 6

Tillämpad linjär algebra

Innehåll

- Matriser med speciella former.
- LU-faktorisering.

Matriser med speciella former

- Diagonalmatriser
- Symmetriska matriser
- Glesa matriser
- Triangulära matriser
- Bandade matriser

1. Diagonalmatriser

Följande $n \times n$-matris kallas för en **diagonalmatris**

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Här är $d_1, d_2, \ldots, d_n$ reella tal. En diagonalmatris kan man enkelt invertera,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Varför blir det så?

2. Symmetriska matriser

En **symmetrisk matris**, A, är en matris som har egenskapen att $A^T = A$. *Vad gäller för matrisens A's storlek?*

3. Glesa matriser

En gles $n \times n$-matris är en matris som till största delen består av element som är noll. En vanlig typ av glesa matriser är bandade matriser där alla element utanför ett smalt band (av storlek m element) runt diagonalen är noll. För att matrisen ska kallas gles så bör $m << n$.

En tridiagonal $n \times n$-bandmatris, $m = 3$, ser ut på följande sätt

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix}$$

4. Triangulära matriser

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **övertriangulär** (en. upper triangular) om alla element nedanför huvuddiagonalen är noll.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **undertriangulär** (en. lower triangular) om alla element ovanför huvuddiagonalen är noll.

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Kan en matris vara både över- och undertriangulär samtidigt?

Triangulära matriser har följande egenskaper

(1) Produkten av två undertriangulära/övertriangulära matriser är en undertriangulär/övertriangulär matris.
(2) En triangulär matris är inverterbar om och endast om all diagonalelement är skilda från noll. *Varför är det så?*
(3) Inversen av en inverterbar under/övertriangulär matris är under/övertriangulär.

5. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifiera de listade egenskaperna (ovan) för triangulära matriser.

6. **Uppgift.** Lös $L\vec{x} = \vec{b}$ där

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

7. **Uppgift.** Lös $U\vec{x} = \vec{b}$ där

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8. **Uppgift.** Vilken form får matrisen LU om L är en undertriangulär matris och U är en övertriangulär matris?

9. **Uppgift.** Hitta alla 3×3-diagonalmatriser, D, som har egenskapen att $D^2 = DD = D$.

10. LU-faktorisering

Resultaten av en Gauss-elimination av en $n \times n$-matris där man inte har gått hela vägen till en reducerad trappstegsform, kan beskrivas i matristermer som en **faktorisering** av matrisen A. Vi kan skriva $A = LU$ där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U en övertriangulär matris.

Om vi vill lösa det linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ kan vi istället lösa $LU\vec{x} = \vec{b}$.

Lösningsalgoritmen kan skrivas som

(1) LU-faktorisera $A \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$.
(2) Låt $\vec{y} = U\vec{x}$ och lös det undertriangulära systemet $L\vec{y} = \vec{b}$ genom **framåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{y}$.
(3) Lös nu det övertriangulära systemet $U\vec{x} = \vec{y}$ genom **bakåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{x}$.

Att lösa ett linjärt ekvationssystem med LU-faktorisering är väldigt effektivt om man har ett system med flera högerled.

Exempel. Hitta LU-faktoriseringen av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } 2\times \text{ rad 1 från rad 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } -3\times \text{ rad 1 från rad 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } -\tfrac{7}{3}\times \text{ rad 2 från rad 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

Den undertriangulära matrisen L skapas med ettor på diagonalen och rad-multiplikatorerna i den undre triangeln,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Det kan finnas fler LU-faktoriseringar av en matris A. Det beror på hur man gör faktoriseringen. Tillvägagångssättet som presenteras ovan är från *Numerical Analysis* av Sauer. I *Contemporary Linear Algebra* av Anton & Busby gör man lite annorlunda.

11. **Uppgift.** LU-faktorisera följande matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

och lös sedan systemet $LU\vec{x} = \vec{b}$ där $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

12. **Uppgift.** LU-faktorisera följande matriser

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

13. **Uppgift.** LU-faktorisera följande matris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det är inte säkert att en icke-singulär kvadratisk matris, A, har en LU-faktorisering. Men om A kan reduceras till trappstegsform med Gauss-elimination **utan radbyten**, så har A en LU-faktorisering. Mer om detta nästa föreläsning. (Med en icke-singulär matris menar vi en matris för vilken inversen existerar.)

Nu är det dags att börja med den förberedande MATLAB-övningen om du inte redan har gjort det. Du hittar den under rubriken Laborationer på kurswebben.