

18 september, 2014

TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

INNEHÅLL

- Matriser.
- Algebraiska operationer med matriser.
- Definition och beräkning av inversen av en matris.

1. Följande tabell av reella tal kallas för en $n \times k$ -matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$n \times 1$ -matrisen $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ är en (kolonn)vektor i \mathbb{R}^n .

$1 \times k$ -matrisen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{bmatrix}$$

är en (rad)vektor.

En matris kallas för en **kvadratisk matris** om antalet av rader är lika med antalet kolonner ($n = k$).

Följande $n \times n$ -matris kallas för **identitetsmatrisen** och betecknas med I_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vad kan vi göra med matriser?

- Om två matriser har samma storlek kan vi addera (eller subtrahera) dem. Låt A och B vara $n \times k$ matriser (n rader och k kolonner)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1k} - b_{1k} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2k} - b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nk} - b_{nk} \end{bmatrix}$$

- Vi kan multiplicera en matris med ett reellt tal c

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1k} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nk} \end{bmatrix}$$

- Vi kan ta **transponatet** av en $n \times k$ -matris A och få en $k \times n$ -matris A^T

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Notera att den i -te raden i A^T är lika med den i -te kolonnen i A och den i -te kolonnen i A^T är lika med den i -te raden i A .

Exempel:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

och:

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

3. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna $A + B$, $B + A$ och $3A - 2B$.

Läs om kommutativa och associativa lagar för addition, *Sats 3.2.1* i Anton & Busby.

4. Matrismultiplikation

Låt A vara en $n \times k$ -matris

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

där $R_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ik}]$ är den i -te raden i A . Låt B vara en $k \times m$ -matris,

$$B = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

där $B_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ki} \end{bmatrix}$ är den i -te kolonnen i B . Notera att för alla i och j så är B_i och R_j^T

vektorer i \mathbb{R}^k . Det betyder att vi kan beräkna skalärprodukten mellan dem, $R_j^T \cdot B_i$.

Matrismultiplikationen mellan A och B är den $n \times m$ matris som ges av

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m] = \begin{bmatrix} R_1^T \cdot B_1 & R_1^T \cdot B_2 & \cdots & R_1^T \cdot B_m \\ R_2^T \cdot B_1 & R_2^T \cdot B_2 & \cdots & R_2^T \cdot B_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n^T \cdot B_1 & R_n^T \cdot B_2 & \cdots & R_n^T \cdot B_m \end{bmatrix}$$

Vad gäller för storleken på matriserna A och B för att multiplikationen mellan A och B ska vara definierad?

5. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Är matrismultiplikationen AB definierad? Är matrismultiplikationen BA definierad? I det fall den är definierad, beräkna produkten.

6. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Beräkna AB , BA , BC och CB .

7. **Uppgift.** Låt A vara $n \times k$ matris. Bevisa att:

$$I_n A = A \quad A I_k = A$$

där I_n och I_k är identitet matriser .

Notera att

- Att produkten AB är definierad är ingen garanti för att BA är definierad.
- Både AB och BA kan vara definierade men de kan ha olika storlek.
- Både AB och BA kan vara definierade men AB är inte nödvändigtvis lika med BA .

8. **Proposition** (Se *Sats 3.2.2* och *Sats 3.2.10* i Anton & Busby.

Låt A och D vara $n \times k$ -matriser, låt B vara en $k \times m$ -matris och C vara en $m \times l$ -matris. Då gäller bland annat följande

- (1) $(AB)C = A(BC)$. Vilken storlek har den resulterande produkten?
- (2) $(A + D)B = AB + DB$
- (3) $(A^T)^T = A$
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.
- (5) $(A + D)^T = A^T + D^T$.
- (6) $(A - D)^T = A^T - D^T$.
- (7) $(cA)^T = c(A^T)$.

9. Matrismultiplikation och linjära ekvationer

Betrakta en $n \times k$ -matris A och en $k \times 1$ -matris \vec{x} :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikationen $A\vec{x}$ ges av

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k \end{bmatrix}$$

vilket betyder att vi kan skriva ett system av linjära ekvationer

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

på följande sätt

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

där $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

10. Proposition (se Sats 3.1.5, i Anton & Busby)

Låt A och B vara $n \times k$ -matriser, låt \vec{x} och \vec{y} vara vektorer i \mathbb{R}^k samt låt c vara ett reell tal. Då gäller att

- (1) $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$.
- (2) $A(c\vec{x}) = c(A\vec{x}) = (cA)\vec{x}$.
- (3) $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$.

11. Inre och yttre matrisprodukt

Om \vec{u} och \vec{v} är två kolonnvektorer av samma storlek så är

- $\vec{u}^T \vec{v}$ en inre matrisprodukt. Vad blir storleken på produkten? Känner vi igen detta sedan tidigare?
- $\vec{u} \vec{v}^T$ en yttre matrisprodukt. Vad blir storleken på produkten?

12. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna $A\vec{x}$.

13. **Uppgift.** Låt

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna $\vec{u}^T \vec{v}$ samt $\vec{u}\vec{v}^T$.

14. Inverterbara matriser

En matris A är inverterbar om det finns en matris B så att AB och BA är identitetsmatriser. Matrisen B kallas för inversen till A och betecknas med A^{-1} . Notera att endast kvadratiska matriser är inverterbara. Varför det?

15. **Proposition** (Se bland annat *Sats 3.3.9* i Anton & Busby)

- (1) Låt A vara en $n \times n$ -matris som är inverterbar och låt A^{-1} vara inversen till A . Då $AA^{-1} = I_n$ och $A^{-1}A = I_n$.
- (2) Låt A vara en $n \times n$ -matris. Om B är en $n \times n$ -matris och $AB = I_n$, då är $B = A^{-1}$.
- (3) Låt A vara en $n \times n$ -matris. Om B är en $n \times n$ -matris och $BA = I_n$, då är $B = A^{-1}$.
- (4) En $n \times n$ -matris A är inverterbar om och endast om $\text{rang}(A) = n$, dvs, antalet av pivotkolonner är lika med n .
- (5) En $n \times n$ -matris A är inverterbar om och endast om systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ bara har en lösning som ges av $\vec{0}$ (triviala lösningen).
- (6) En $n \times n$ -matris A är inverterbar om och endast om systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ bara har **en** lösning för alla \vec{b} .
- (7) En $n \times n$ -matris A är inverterbar om och endast om kolonnerna är linjärt oberoende (**detta återkommer vi till i F8**).

16. **Uppgift.** Bestäm om följande matris är inverterbar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

17. **Uppgift.** Bestäm om följande matris A är inverterbar och i så fall hitta inversen A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

18. **Hur kan vi beräkna inversen?**

Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Inversen till A är en matris

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_n]$$

där \vec{b}_i är den i -te kolonnen av B , sådan att

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Det betyder att $\vec{b}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$ är en lösning till

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \vec{e}_i$$

Vi kan konstatera att inversen till A kan beräknas på följande sätt (i Anton & Busby *The Inversion Algorithm*);

Använd Gauss-Jordans elimineringsprocess på följande totalmatris (med identitetsmatrisen som högeled)

$$[A | I_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

och reducera den till

$$[I_n | B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right]$$

Inversen, A^{-1} , ges av $A^{-1} = B$.

19. Proposition (se *Sats 3.2.7* i Anton & Busby)

En 2×2 -matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$ ($ad - bc$ kallas för determinanten av A). I detta fall ges inversen till A av

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

20. Uppgift. Bestäm om följande matris A är inverterbar och i så fall hitta inversen A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

21. Proposition (Se *Sats 3.3.5* i Anton & Busby)

Ett linjärt ekvationssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ med n ekvationer och n obekanta kan lösas med hjälp av A^{-1} förutsatt att A är inverterbar. Lösningen ges av $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

22. **Uppgift.** Verifiera att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

är inversen till

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/5 & 1/30 \\ 1/3 & -1/5 & 1/15 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

Lös sedan systemet

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

23. **Uppgift.** Beräkna lösningen till följande system

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1 + 8x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_1 + 8x_3 = -6$$

För vilka vektorer \vec{b} är systemet konsistent?

24. **Uppgift.** Vad gäller för b_1, b_2 och b_3 för att systemet ska vara konsistent?

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_3 = b_2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

25. **Uppgift.** En vektor \vec{w} är en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3,$ och $\vec{v}_4,$ om det existerar tal c_1, c_2, c_3, c_4 så att

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4.$$

I följande fall, ställ upp ekvationssystemet för bestämning av $c_1, c_2, c_3, c_4.$ Avgör med hjälp av Matlab om systemet har någon lösning. Om en lösning finns så lös systemet.

a)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

b)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

26. **Uppgift.** Ta reda på om följande matriser är inverterbara, och i så fall, beräkna inversen (för hand).

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

För uppgift d) - e), använd Matlab.

$$d) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$