

18 september, 2014

TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

INNEHÅLL

- Matriser.
- Algebraiska operationer med matriser.
- Definition och beräkning av inversen av en matris.

1. Följande tabell av reella tal kallas för en  $n \times k$ -matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$n \times 1$ -matrisen  $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$  är en (kolonn)vektor i  $\mathbb{R}^n$ .

$1 \times k$ -matrisen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{bmatrix}$$

är en (rad)vektor.

En matris kallas för en **kvadratisk matris** om antalet av rader är lika med antalet kolonner ( $n = k$ ).

Följande  $n \times n$ -matris kallas för **identitetsmatrisen** och betecknas med  $I_n$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vad kan vi göra med matriser?

- Om två matriser har samma storlek kan vi addera (eller subtrahera) dem. Låt  $A$  och  $B$  vara  $n \times k$  matriser ( $n$  rader och  $k$  kolonner)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1k} - b_{1k} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2k} - b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nk} - b_{nk} \end{bmatrix}$$

- Vi kan multiplicera en matris med ett reellt tal  $c$

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1k} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nk} \end{bmatrix}$$

- Vi kan ta **transponatet** av en  $n \times k$ -matris  $A$  och få en  $k \times n$ -matris  $A^T$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Notera att den  $i$ -te raden i  $A^T$  är lika med den  $i$ -te kolonnen i  $A$  och den  $i$ -te kolonnen i  $A^T$  är lika med den  $i$ -te raden i  $A$ .

Exempel:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

och:

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

3. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna  $A + B$ ,  $B + A$  och  $3A - 2B$ .

Läs om kommutativa och associativa lagar för addition, *Sats 3.2.1* i Anton & Busby.

#### 4. Matrismultiplikation

Låt  $A$  vara en  $n \times k$ -matris

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

där  $R_i = [ a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ik} ]$  är den  $i$ -te raden i  $A$ . Låt  $B$  vara en  $k \times m$ -matris,

$$B = [ B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m ] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

där  $B_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ki} \end{bmatrix}$  är den  $i$ -te kolonnen i  $B$ . Notera att för alla  $i$  och  $j$  så är  $B_i$  och  $R_j^T$

vektorer i  $\mathbb{R}^k$ . Det betyder att vi kan beräkna skalärprodukten mellan dem,  $R_j^T \cdot B_i$ .

Matrismultiplikationen mellan  $A$  och  $B$  är den  $n \times m$  matris som ges av

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} [ B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m ] = \begin{bmatrix} R_1^T \cdot B_1 & R_1^T \cdot B_2 & \cdots & R_1^T \cdot B_m \\ R_2^T \cdot B_1 & R_2^T \cdot B_2 & \cdots & R_2^T \cdot B_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n^T \cdot B_1 & R_n^T \cdot B_2 & \cdots & R_n^T \cdot B_m \end{bmatrix}$$

Vad gäller för storleken på matriserna  $A$  och  $B$  för att multiplikationen mellan  $A$  och  $B$  ska vara definierad?

5. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Är matrismultiplikationen  $AB$  definierad? Är matrismultiplikationen  $BA$  definierad? I det fall den är definierad, beräkna produkten.

6. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Beräkna  $AB$ ,  $BA$ ,  $BC$  och  $CB$ .

7. **Uppgift.** Låt  $A$  vara  $n \times k$  matris. Bevisa att:

$$I_n A = A \quad A I_k = A$$

där  $I_n$  och  $I_k$  är identitet matriser .

Notera att

- Att produkten  $AB$  är definierad är ingen garanti för att  $BA$  är definierad.
- Både  $AB$  och  $BA$  kan vara definierade men de kan ha olika storlek.
- Både  $AB$  och  $BA$  kan vara definierade men  $AB$  är inte nödvändigtvis lika med  $BA$ .

8. **Proposition** (Se *Sats 3.2.2* och *Sats 3.2.10* i Anton & Busby.

Låt  $A$  och  $D$  vara  $n \times k$ -matriser, låt  $B$  vara en  $k \times m$ -matris och  $C$  vara en  $m \times l$ -matris. Då gäller bland annat följande

- (1)  $(AB)C = A(BC)$ . Vilken storlek har den resulterande produkten?
- (2)  $(A + D)B = AB + DB$
- (3)  $(A^T)^T = A$
- (4)  $(AB)^T = B^T A^T$ .
- (5)  $(A + D)^T = A^T + D^T$ .
- (6)  $(A - D)^T = A^T - D^T$ .
- (7)  $(cA)^T = c(A^T)$ .

## 9. Matrismultiplikation och linjära ekvationer

Betrakta en  $n \times k$ -matris  $A$  och en  $k \times 1$ -matris  $\vec{x}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikationen  $A\vec{x}$  ges av

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k \end{bmatrix}$$

vilket betyder att vi kan skriva ett system av linjära ekvationer

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

på följande sätt

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

där  $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

## 10. Proposition (se Sats 3.1.5, i Anton & Busby)

Låt  $A$  och  $B$  vara  $n \times k$ -matriser, låt  $\vec{x}$  och  $\vec{y}$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^k$  samt låt  $c$  vara ett reell tal. Då gäller att

- (1)  $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ .
- (2)  $A(c\vec{x}) = c(A\vec{x}) = (cA)\vec{x}$ .
- (3)  $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$ .

## 11. Inre och yttre matrisprodukt

Om  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är två kolonnvektorer av samma storlek så är

- $\vec{u}^T \vec{v}$  en inre matrisprodukt. Vad blir storleken på produkten? Känner vi igen detta sedan tidigare?
- $\vec{u} \vec{v}^T$  en yttre matrisprodukt. Vad blir storleken på produkten?

12. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna  $A\vec{x}$ .

13. **Uppgift.** Låt

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna  $\vec{u}^T \vec{v}$  samt  $\vec{u}\vec{v}^T$ .

#### 14. Inverterbara matriser

En matris  $A$  är inverterbar om det finns en matris  $B$  så att  $AB$  och  $BA$  är identitetsmatriser. Matrisen  $B$  kallas för inversen till  $A$  och betecknas med  $A^{-1}$ . Notera att endast kvadratiska matriser är inverterbara. Varför det?

15. **Proposition** (Se bland annat *Sats 3.3.9* i Anton & Busby)

- (1) Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris som är inverterbar och låt  $A^{-1}$  vara inversen till  $A$ . Då  $AA^{-1} = I_n$  och  $A^{-1}A = I_n$ .
- (2) Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris. Om  $B$  är en  $n \times n$ -matris och  $AB = I_n$ , då är  $B = A^{-1}$ .
- (3) Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris. Om  $B$  är en  $n \times n$ -matris och  $BA = I_n$ , då är  $B = A^{-1}$ .
- (4) En  $n \times n$ -matris  $A$  är inverterbar om och endast om  $\text{rang}(A) = n$ , dvs, antalet av pivotkolonner är lika med  $n$ .
- (5) En  $n \times n$ -matris  $A$  är inverterbar om och endast om systemet  $A\vec{x} = \vec{0}$  bara har en lösning som ges av  $\vec{0}$  (triviala lösningen).
- (6) En  $n \times n$ -matris  $A$  är inverterbar om och endast om systemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  bara har **en** lösning för alla  $\vec{b}$ .
- (7) En  $n \times n$ -matris  $A$  är inverterbar om och endast om kolonnerna är linjärt oberoende (**detta återkommer vi till i F8**).

16. **Uppgift.** Bestäm of följande matris är inverterbar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

17. **Uppgift.** Bestäm om följande matris  $A$  är inverterbar och i så fall hitta inversen  $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

18. **Hur kan vi beräkna inversen?**

Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Inversen till  $A$  är en matris

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [ \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \cdots \quad \vec{b}_n ]$$

där  $\vec{b}_i$  är den  $i$ -te kolonnen av  $B$ , sådan att

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Det betyder att  $\vec{b}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$  är en lösning till

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \vec{e}_i$$

Vi kan konstatera att inversen till  $A$  kan beräknas på följande sätt (i Anton & Busby *The Inversion Algorithm*);

Använd Gauss-Jordans elimineringsprocess på följande totalmatris (med identitetsmatrisen som högeled)

$$[A | I_n] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

och reducera den till

$$[I_n | B] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right]$$

Inversen,  $A^{-1}$ , ges av  $A^{-1} = B$ .

**19. Proposition** (se *Sats 3.2.7* i Anton & Busby)

En  $2 \times 2$ -matris  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  är inverterbar om och endast om  $ad - bc \neq 0$  ( $ad - bc$  kallas för determinanten av  $A$ ). I detta fall ges inversen till  $A$  av

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**20. Uppgift.** Bestäm om följande matris  $A$  är inverterbar och i så fall hitta inversen  $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

**21. Proposition** (Se *Sats 3.3.5* i Anton & Busby)

Ett linjärt ekvationssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  med  $n$  ekvationer och  $n$  obekanta kan lösas med hjälp av  $A^{-1}$  förutsatt att  $A$  är inverterbar. Lösningen ges av  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ .



22. **Uppgift.** Verifiera att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

är inversen till

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/5 & 1/30 \\ 1/3 & -1/5 & 1/15 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

Lös sedan systemet

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

23. **Uppgift.** Beräkna lösningen till följande system

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1 + 8x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6$$

$$x_1 + 8x_3 = -6$$

För vilka vektorer  $\vec{b}$  är systemet konsistent?

24. **Uppgift.** Vad gäller för  $b_1, b_2$  och  $b_3$  för att systemet ska vara konsistent?

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_3 = b_2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

25. **Uppgift.** En vektor  $\vec{w}$  är en linjärkombination av vektorerna  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3,$  och  $\vec{v}_4,$  om det existerar tal  $c_1, c_2, c_3, c_4$  så att

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4.$$

I följande fall, ställ upp ekvationssystemet för bestämning av  $c_1, c_2, c_3, c_4.$  Avgör med hjälp av Matlab om systemet har någon lösning. Om en lösning finns så lös systemet.

a)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

b)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

26. **Uppgift.** Ta reda på om följande matriser är inverterbara, och i så fall, beräkna inversen (för hand).

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

För uppgift d) - e), använd Matlab.

$$d) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$