Föreläsning 5
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik
Skolan för elektro- och systemteknik

16 september, 2014

Introduktion

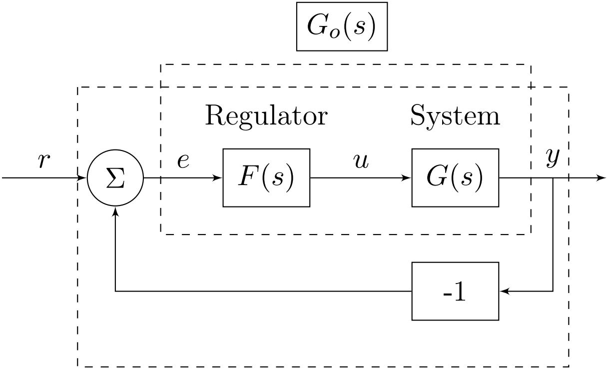
Förra gången:

- Frekvenssvar
- Bodediagram

Dagens program:

- Regulatorkonstuktion

Regulatorkonstruktion



$$\boxed{G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}}$$

Regulatorkonstruktion

Hur används $G_o(i\omega)$ för att bedöma egenskaper hos $G_c(s)$?

- Stabilitet
- Snabbhet och svängighet
- Stationära fel

Regulatorkonstruktion

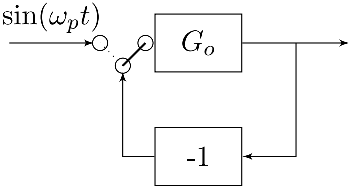
Stabilitet: Nyquistkriteriet

Antag att $G_o(s)$ är stabil $\Longrightarrow$
$G_c(s)$ stabil om Nyquistkurvan till $G(s)$ **ej** omsluter -1.

Intuitiv frekvenstolkning

Antag $u(t) = \sin(\omega_p t)$.

$\Longrightarrow y(t) = |G_o(i\omega_p)| \sin\left[\omega_p t - \pi\right] = -|G_o(i\omega_p)| \sin\left(\omega_p t\right)$



Svaret blir $y(t) = |G_o(i\omega)|^k \cdot \sin(\omega_p t)$ med $k \to \infty$.

Om $|G_o(i\omega_p)| > 1$ exploderar systemet!

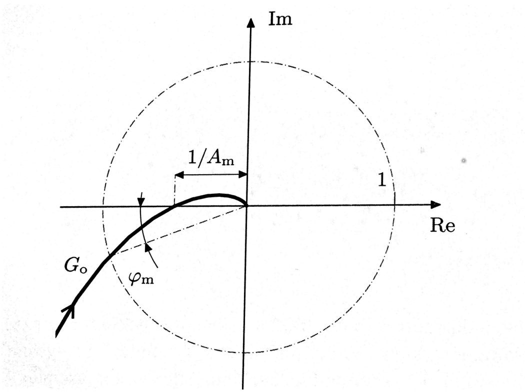
Regulatorkonstruktion

Vi kommer använda följande storheter ofta.

- *Skärfrekvensen* (Crossover frequency, ω_c) ges av att $|G_o(i\omega_c)| = 1$.
- *Phase-crossover frequency* (ω_p) ges av att $\arg\left[G_o(i\omega_p)\right] = -180°$.
- *Fasmarginalen* (φ_m) ges av $\varphi_m = \arg\left[G_o(i\omega_c)\right] - (-180°)$.
- *Amplitudmarginalen* (A_m) ges av att $A_m = \frac{1}{|G_o(i\omega_p)|}$.

Dessa kan enkelt tolkas grafiskt i ett Nyquistdiagram.

Regulatorkonstruktion



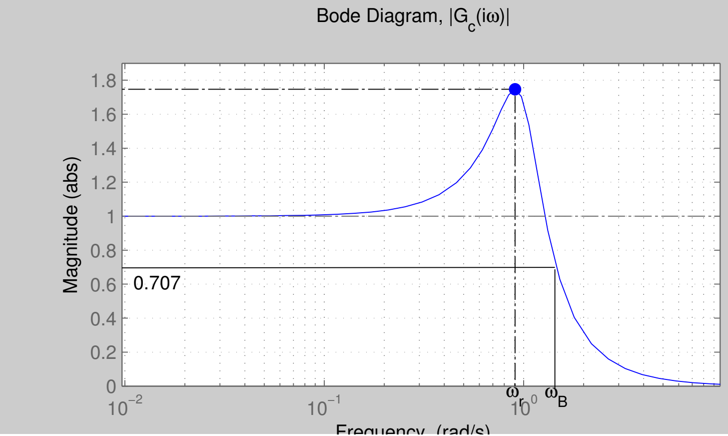
För *snälla system* har man ett stabilitetskrav att

$$\begin{cases} \varphi_m & > 0 \\ A_m & > 1 \end{cases}$$

Snabbhet och svängighet

$$G_c(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1 + G_o(i\omega)}$$

Typiskt utseende på $|G_c(i\omega)|$:



Snabbhet och svängighet

Från bilden på förra sidan har vi storheterna:

- **Bandbredd:** $\omega_B \approx$ snabbhet (jämför T_r)
- **Resonansfrekvens:** ω_r
- **Resonanstopp:** $M_p \approx$ översläng
- **Stationärt fel:** $e_0 = 1 - G_c(0)$

Man önskar sig att

$$\begin{cases} \omega_B & \text{stor} \\ M_p & \text{liten} \\ e_0 & = 0 \end{cases}$$

Snabbhet och svängighet

Koppling mellan kretsförstärkningen $G_o(i\omega)$ och slutna systemet $G_c(i\omega)$:

$$G_c(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1 + G_o(i\omega)} \Longleftrightarrow G_o(i\omega) = \frac{G_c(i\omega)}{1 - G_c(i\omega)}$$

Vi ser att om

$$G_c(i\omega) \approx 1 \Longleftrightarrow G_o(i\omega) \text{ stor}$$

$$G_c(i\omega) \text{ liten} \Longleftrightarrow G_o(i\omega) \text{ liten}$$

Snabbhet och svängighet

Tumregel:

$$\boxed{\omega_B \approx \omega_c}$$

Om fasmarginalen φ_m är liten (A_m nära 1)

$$\Longrightarrow G_c(i\omega_c) \approx \frac{-1}{1-1}$$

$\Rightarrow M_p$ stor $\Rightarrow$ stor översläng

Snabbhet och svängighet

Krav på snabbhet och dämpning ger krav på ω_c, φ_m och A_m.

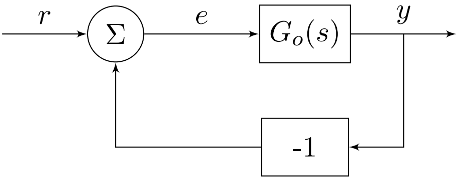
Sammanfattning: Det är *enklare* att göra regulatorkonstruktion genom att modifiera kretsförstärkningen

$$G_o = FG$$

än på det slutna systemet

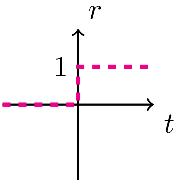
$$G_c = \frac{FG}{1 + FG}$$

Stationära fel



$$\boxed{E(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}\ R(s)}$$

Låt $r(t)$ vara ett enhetssteg.



Då är $R(s) = \frac{1}{s}$.

Stationära fel

Använder vi *slutvärdesteoremet* (Obs. att vi måste ha ett stabilt system!)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{1+G_o(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G_o(0)}$$

ser vi att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \text{ om } G_o(0) = \infty$$

dvs. att det stationära felet är noll om $G_o(s)$ innehåller minst en integrator.

Kompensering

Bestäm regulator $F(s)$ utifrån krav på

I. snabbhet $\Rightarrow$ Krav på ω_c

II. dämpning $\Rightarrow$ Krav på φ_m

III. stationärt fel $\Rightarrow$ Krav på $|G_o(0)|$

Kompensering

I. Snabbhet

Det räcker med en P-regulator

$$F(s) = K$$

Detta flyttar amplitudkurvan (uppåt eller nedåt), men ändrar ej faskurvan.

Kompensering

II. Dämpning

Använd en PD-regulator ($\beta = 0$) formulerad med hjälp av en *lead-länk*:

$$F_{\text{lead}}(s) = \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

III. Stationärt fel

Använd en PI-regulator ($\gamma = 0$) formulerad med hjälp av en *lag-länk*:

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Kompensering

I + II + III. Sammantagen regulator

Den fullständiga regulatorn ges av:

$$F(s) = K \cdot F_{\text{lead}}(s) \cdot F_{\text{lag}}(s) = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \cdot \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Hur ska vi bestämma τ_D, τ_I, β, K och γ?

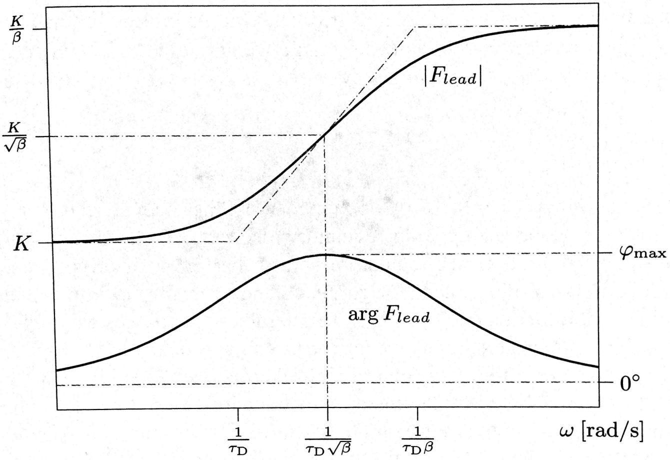
Kompensering

Några observationer:

- $\arg\left[F_{\text{lead}}(i\omega)\right] > 0^\circ \;\forall\; \omega$ lyfter fasen $\Rightarrow$ Bättre φ_m.
- $\arg\left[F_{\text{lead}}(i\omega)\right]$ maximal för $\omega = \frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$ med maxvärde $\arctan\left[\frac{1}{2}\frac{1-\beta}{\sqrt{\beta}}\right]$ som går mot 90° när $\beta \to 0$.
- $|F_{\text{lead}}\left(i\frac{1}{\tau_D\beta}\right)| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$
- $|F_{\text{lead}}(i\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \text{ liten} \\ \frac{1}{\beta} & \omega \text{ stor} \end{cases}$

Se figur 5.14 på sida 107.

Lead



$\frac{K}{\beta}$
$\frac{K}{\sqrt{\beta}}$
K
$|F_{lead}|$
$\varphi_{\max}$
$\arg F_{lead}$
$0°$
$\frac{1}{\tau_D}$
$\frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$
$\frac{1}{\tau_D\beta}$
ω [rad/s]

Kompensering

Arbetsgång

1. Bestäm önskad $\omega_B \to \omega_c$
2. Bestäm önskad $\varphi_m \xrightarrow{(45^\circ - 60^\circ)}$ Nödvändig fasökning vid ω_c
3. Bestäm β från diagram (eller räkna ut)
4. $\omega_c = \frac{1}{\tau_D \sqrt{\beta}} \Rightarrow \tau_D = \frac{1}{\sqrt{\beta} \cdot \omega_c}$
5. Välj K så att $|G(i\omega_c)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot K = 1$, dvs. $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|}$

OBS. Behövs en stor fasökning; använd flera länkar i serie.

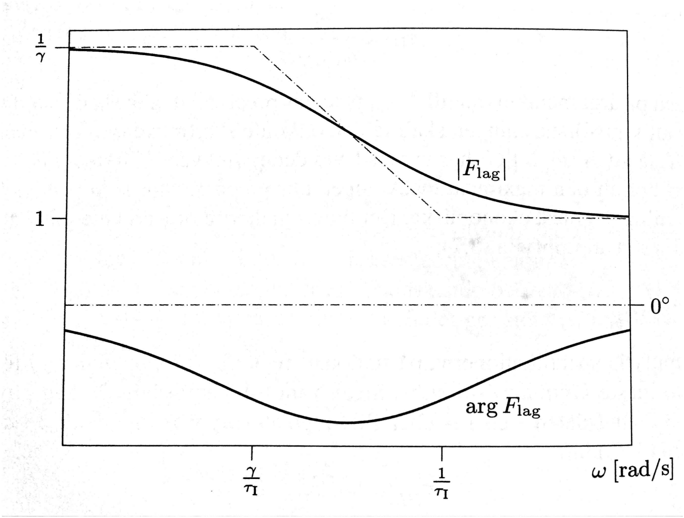
III. PI / lag-länk

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

- $F_{\text{lag}}(0) = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma$ liten $\Rightarrow |G_o(0)|$ stor $\Rightarrow$ små stationära fel
- $\arg F_{\text{lag}}(i\omega) < 0 \ \ \forall\, \omega$ försämrar φ_m

Se figur 5.15 på sida 108 i boken.

Lag



$\frac{1}{\gamma}$
1
$|F_{\mathrm{lag}}|$
0°
$\arg F_{\mathrm{lag}}$
$\frac{\gamma}{\tau_I}$
$\frac{1}{\tau_I}$
ω [rad/s]

Arbetsgång för PI/lag-länk

- Specificera $e_0 \Rightarrow$ Beräkna γ
- Försök med $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} \Rightarrow \arg F_{\text{lag}}(i\omega_c) \geq 5.7^\circ$ dvs. liten påverkan på φ_m. Lägg till extra 5.7° med hjälp av F_{lead}
- Om felet avtar för långsamt $\Rightarrow$ minska τ_I och kompensera eventuell försämring av φ_m med F_{lead}