

# Föreläsning 4

## Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik  
Skolan för elektro- och systemteknik

15 september 2014



Förra gången:

- Rotort
- Nyquistkriteriet

Dagens program:

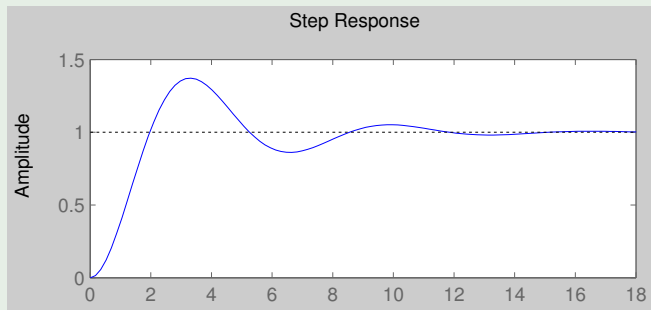
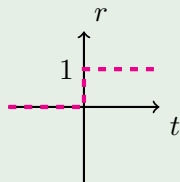
- Specifikationer
- Frekvenssvar
- Bodediagram

# Objektiva prestandamått

1. Utsignalens förmåga att följa en given referenssignal (servo).

## Exempel (Stegsvar)

Antag att ett steg ges i referenssignalen vid tiden  $t = 0$ . Härunder syns steget i referenssignalen samt svaret från ett system (som försöker följa steget):



Man kan mäta detta med hjälp av bland annat

- *Stigtiden*,  $T_r = t_2 - t_1$  där

$$\begin{cases} y(t_2) = 0.9 \\ y(t_1) = 0.1 \end{cases}$$

- *Insvängningstiden*,  $T_s$  som defineras av att

$$1 - p \leq y(t) \leq 1 + p \quad \forall t \geq T_s$$

- *Överslängen*,  $M = (y_{\max} - 1) \cdot 100\%$ .

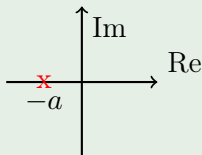
# Objektiva prestandamått

## Exempel

Antag att

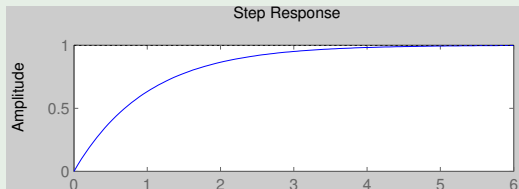
$$G_c(s) = \frac{a}{s + a}$$

Stegsvaret och polplaceringen syns i figurerna (för  $a = 1$ ).



Dessa ger oss

$$\begin{cases} T_r & = \frac{2.2}{a} \\ T_s(5\%) & \approx \frac{3}{a} \\ M & = 0 \end{cases}$$



# Objektiva prestandamått

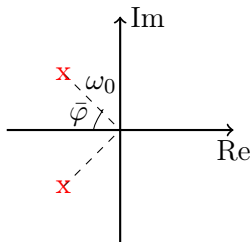
Skriver vi om ett systems överföringsfunktion på formen

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2}$$

kan vi definera den *relativa dämpningen*,  $\xi$ , som

$$\xi \equiv \cos \bar{\varphi}$$

där vinkeln  $\bar{\varphi}$  är definerad i figuren (Fig 2.6 i boken) nedan



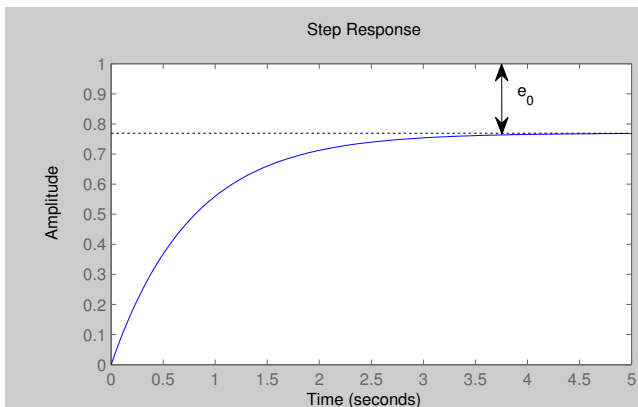
Då ges de ovannämnda prestandamåtten av

$$\begin{cases} T_r = \frac{\text{konstant}}{\omega_0} \\ T_s(5\%) \approx \frac{3}{\omega_0 \xi} \\ M = e^{\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \end{cases} \quad (\text{för små } \xi)$$

Se boken för härledningar.

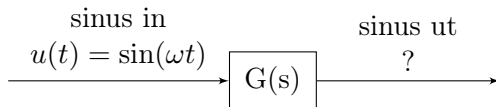
Viktigt vid rotortsanalys/-design.  $\Leftrightarrow$  *Dominerande poler.*

## 2. Stationära fel



3. Andra mått som t.ex. störningsundertryckningar (regulatorproblemet).





$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{|G(i\omega)|}_{\text{förstärkning}} \cdot \sin \left[ \omega t + \underbrace{\arg G(i\omega)}_{\text{fasvridning}} \right] + \text{transient (stabil)}$$

*Frekvenssvaret* ges av  $G(i\omega)$ .

Bevis genom faltningsräknande.

## Exempel

Antag att  $G(s) = s$  och att insignalen är  $u(t) = \sin(\omega t)$ .

$$\implies y(t) = \omega \cos(\omega t) = \omega \sin \left[ \omega t + \frac{\pi}{2} \right]$$

**Fasvrider:**  $+90^\circ$

**Förstärker:** Höga frekvenser mer än låga (med faktor  $\omega$ )

## Exempel

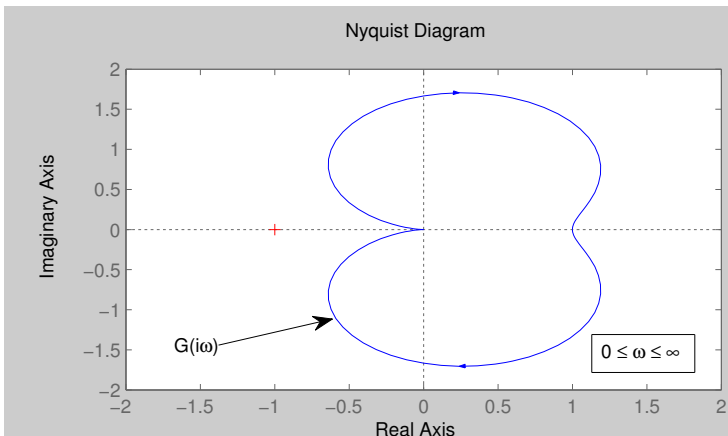
Antag att  $G(s) = \frac{1}{s}$  och att insignalen är  $u(t) = \sin(\omega t)$ .

$$\implies y(t) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + \text{konstant} = \frac{1}{\omega} \sin \left[ \omega t - \frac{\pi}{2} \right] + \text{konstant}$$

**Fasvrider:**  $-90^\circ$

**Förstärker:** Låga frekvenser mer än höga (med faktor  $\frac{1}{\omega}$ )

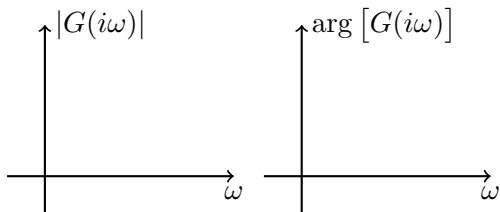
## Nyquistdiagram:



Svårt att avläsa frekvens.

# Rita $G(i\omega)$ som funktion av $\omega$

**Bodediagram:**



Två grafer med  $\omega$  som variabel på den horisontella axeln och förstärkningen respektive fasvridningen på den vertikala.

## Exempel

Antag att

$$G(s) = \frac{s + b}{s(s + a)} = \underbrace{\frac{b}{a}}_K \frac{1 + \frac{s}{b}}{s(1 + \frac{s}{a})}$$

då är frekvenssvaret givet av

$$G(i\omega) = \frac{K(1 + \frac{i\omega}{b})}{i\omega(1 + \frac{i\omega}{a})}$$

## Exempel (fort.)

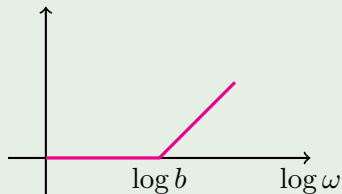
**Amplitudkurva:**

$$\log |G(i\omega)| = \log K + \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} - \log \omega - \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

**Approximation:**

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} &= \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2 \right] \approx \\ &\approx \begin{cases} 0, & \omega < b, \quad \omega \text{ liten} \\ \log \omega - \log b, & \omega \geq b, \quad \omega \text{ stor} \end{cases} \end{aligned}$$

## Exempel (fort.)



Lutningen ökar med  $+1 \approx 20$  dB/dekad.

Maximalt fel vid  $\omega = b \Rightarrow \frac{1}{2} \log 2 = 0.15 = 3$  dB.

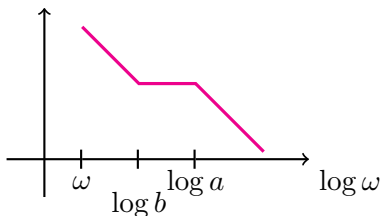
# Approximativt Bodediagram

Vi hittar *brytpunkter* vid frekvenserna

$$\omega = b \quad \text{som ger lutning } +1$$

$$\omega = a \quad \text{som ger lutning } -1$$

Om  $\omega$  liten är lutningen (antal integratorer)  $-1$ .





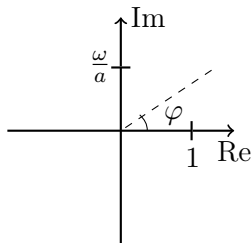
# Approximativt Bodediagram

I praktiken ritas Bodediagram med hjälp av dator.

På övningarna är det enklast att beräkna exakta värden vid brytpunkterna och sen några till och interpolera.

Man brukar också rita en faskurva i Bodediagram.

$$\begin{aligned}\arg [G(i\omega)] &= \arg \left[ \frac{1 + \frac{i\omega}{b}}{i\omega \left(1 + \frac{i\omega}{a}\right)} \right] = \\ &= \arg \left[ 1 + \frac{i\omega}{b} \right] - \arg[i\omega] - \arg \left[ 1 + \frac{i\omega}{a} \right]\end{aligned}$$



$$\varphi = \arctan \left[ \frac{\varepsilon}{a} \right]$$

$$\Rightarrow \arg [G(i\omega)] = \arctan\left(\frac{\omega}{b}\right) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

I praktiken ritas även faskurvan med hjälp av en dator.  
På övningarna: se amplitudkurva.

OBS: För komplexa tal:

$$\log(G(i\omega)) = \log |G(i\omega)| + i \arg [G(i\omega)]$$

**Kom ihåg att:**

- $\arctan(0) = 0^\circ$
- $\arctan(1) = 45^\circ$
- $\arctan(\infty) = 90^\circ$

*Minnesregel:*

Argumentet är  $k$ -värdet för en linje med lutning  $\arctan k$ .

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2}$$

Vi kallar  $\xi$  för den *relativa dämpningen* och den antar värden i intervallet  $0 < \xi < 1$ .

Det finns många formler i boken.

**Lutning:**

$$\begin{cases} \omega \text{ liten} & 0 \\ \omega \text{ stor} & -2 \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \log |G(i\omega_0)| = \log \frac{1}{2\xi} \end{cases}$$

Liten dämpning  $\Rightarrow$  Stor förstärkning av frekvenser nära  $\omega_0$ !

Rita noggrant!

Jämför

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{1+s/b}{1+s/a} \\G_2(s) &= \frac{1-s/b}{1+s/a}\end{aligned}$$

De har samma amplitudkurva:

$$|G_1(i\omega)| = |G_2(i\omega)|$$

Faskurvorna skiljer sig dock:

$$\begin{aligned}\arg [G_1(i\omega)] &= \arctan \frac{\omega}{b} - \arctan \frac{\omega}{a} \\ \arg [G_2(i\omega)] &= -\arctan \frac{\omega}{b} - \arctan \frac{\omega}{a}\end{aligned}$$

dvs.

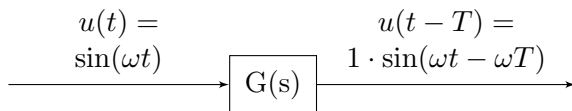
$$\arg [G_2(i\omega)] < \arg [G_1(i\omega)]$$

$$\arg [G_2(i\omega)] < \arg [G_1(i\omega)]$$

$\Rightarrow G_2$  fasvrider mer (negativt) än  $G_1$ !

*Minimumfas* = nollställen och poler i V.H.P.





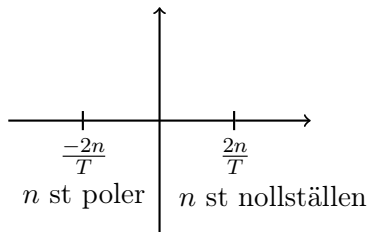
$$\implies G(i\omega) = 1 \cdot e^{-i\omega T}$$

$$\implies G(s) = e^{-sT}$$

Vi ser att  $|G(i\omega)| = 1$  och att  $\arg [G(i\omega)] = -\omega T$ .

Icke-minimumfas, jämför  $G_1 = 1$ .

$$e^{-sT} = \left[ \frac{e^{-\frac{sT}{2n}}}{e^{+\frac{sT}{2n}}} \right]^n \approx \frac{\left[ 1 - \frac{sT}{2n} \right]^n}{\left[ 1 + \frac{sT}{2n} \right]^n}$$



# Bodes relation

*Bodes relation* ger en koppling mellan förstärkning och fas.

## Sats (Bodes relation)

Låt  $G(s)$  vara minimumfas och  $G(0) > 0$ .

Om  $|G(i\omega)|$  i ett visst frekvensområde avtar med

$$20\text{dB/dekad} \Rightarrow \arg [G(i\omega)] \approx -90^\circ$$

$$40\text{dB/dekad} \Rightarrow \arg [G(i\omega)] \approx -180^\circ$$

*osv.*

För komplexa tal:

$$\log(G(i\omega)) = \log |G(i\omega)| + i \arg [G(i\omega)]$$