

Svar till tal av tentakaraktär i Vågor och partiklar 2008 SK1131

1.

400 linjer/mm motsvarar en gitterkonstant $d = 2.5 \mu\text{m}$. Våglängderna är $\lambda_1 = 1549 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 1550 \text{ nm}$ och $\lambda_3 = 1551 \text{ nm}$. Vid vinkelrät infall ger vinkel till maximum nummer m av $m\lambda = d \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{m\lambda}{d} = m \cdot 0.62$ för mittvåglängden. Detta ger att endast första ordningens maximum finns. ($|\sin \theta| \leq 1$, även nollte ordningen finns, men den delar inte upp våglängder.)

a) För $m = 1$ blir vinkeln $\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda}{d}$, vilket ger $\theta_1 = 38.29^\circ$, $\theta_2 = 38.32^\circ$, $\theta_3 = 38.35^\circ$ för λ_1, λ_2 och λ_3 . Skillnaden mellan 2 max är $\Delta\theta = 0.0292^\circ = 0.51 \text{ mrad}$. På ett avstånd L ska vinkelskillnaden motsvara $\Delta x = 0.5 \text{ mm}$ i sidled. Detta ger $\Delta\theta \approx \tan \Delta\theta = \frac{\Delta x}{L} \Rightarrow L = \frac{0.5 \text{ mm}}{0.51 \cdot 10^{-3}} \approx 0.98 \text{ m}$

b) Minsta upplösbara vinkel i cirkulär apertur ges av Rayleighkriteriet, $\sin \theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{1.22 \cdot 1550 \text{ nm}}{5 \text{ mm}} = 3.78 \cdot 10^{-4}$. Beträktas punkterna från en sträcka L' ges vinklen mellan punkterna av $\tan \theta = \frac{\Delta x}{L'}$. Om nu vi låter θ vara θ_{\min} och $\sin \theta_{\min} \approx \tan \theta_{\min}$ så är $L' = \frac{\Delta x}{\tan \theta_{\min}} \approx \frac{0.5 \text{ mm}}{3.78 \cdot 10^{-4}} \approx 1.32 \text{ m}$

Alternativ lösning: Ögat är inte känsligt för 1550 nm så det går inte att uppfatta punkterna alls.

2. Strålen är 2 mm i diameter före linsen och ska ner till $7 \mu\text{m}$ (till 1:a diffraktionsmin) vid fibern. Enligt Rayleighkriteriet blir strålstorleken (diameter till 1:a diffraktionsmin) $d_{spot} = 1.22 \frac{f\lambda}{D}$. Här är $\lambda = 1300 \text{ nm}$, $D = 2 \text{ mm}$, $d_{spot} = 7 \mu\text{m}$, vilket ger $f = \frac{D d_{spot}}{1.22\lambda} \approx 8.8 \text{ mm}$.

3.

$n_1 < n_3 < n_2 \Rightarrow$ fasskift vid reflexion i första ytan men inte i andra, $n_2 = 1.45$.

Då har vi $\varphi_1 = \pi$ och $\varphi_2 = 2n_2 d \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$ där d är oljans tjocklek. Fasskillnaden är $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(\frac{4n_2 d}{\lambda} - 1\right)\pi$. Konstruktiv interferens mellan reflexer fås då $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$, $m =$

$0, 1, 2, \dots$. Detta ger $d_m = \frac{(2m+1)\lambda}{4n_2}$. Tjockleken ska vara sådan att både $\lambda = 500 \text{ nm}$ och $\lambda' = 700$

nm har konstruktiv interferens vid reflexion. Det ger att $d = \frac{(2m+1)\lambda}{4n_2} = \frac{(2m'+1)\lambda'}{4n_2} \Rightarrow \frac{2m'+1}{2m+1} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{5}{7}$. En lösning är $m' = 2$ och $m = 3$. Då blir tjockleken $d = \frac{7 \cdot 500 \text{ nm}}{4 \cdot 1.45} = 603 \text{ nm}$.

4.

Avstånd mellan linserna är $d = 25 \text{ cm}$, $f_{obj} = 0.5 \text{ cm}$, $f_{ok} = 10 \text{ cm}$.

a) Mellanbilden ska avbildas en fokallängd från okularet för att ge slutbilden i oändligheten.

Alltså är bildavståndet $i_{obj} = d - f_{ok} = 15 \text{ cm}$.

Linsformeln ger $p_{obj} = \frac{1}{\frac{1}{f_{obj}} - \frac{1}{i_{obj}}} \approx 0.5172 \text{ cm} \approx 5.2 \text{ mm}$

b) Förstoringen från avbildning i objektivet är $M_{obj} = (-) \frac{i_{obj}}{p_{obj}} \approx \frac{15 \text{ cm}}{0.52 \text{ cm}} = 29$. Förstoringen från

okularet ges av luppförstoringsformeln: $M_{ok} = \frac{25 \text{ cm}}{f_{ok}} = \frac{25 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 2.5$. Den totala förstoringen

blir $M_{tot} = M_{ok} \cdot M_{obj} = 2.5 \cdot 29 = 72.5$

5. Såpan har luft på båda sidor om sig med $n=1$. Antar att såpans brytningsindex är nära vattnets, $n_{såpa} = 1.3$. d är tjockleken på bubblans väggar.

Stråle A är den som reflekteras mot såpfilmens framsida och Stråle B den som reflekteras mot baksidan.

Väglängd Stråle A, $LA = \lambda/2$ (fasskifte vid reflexion mot tätare medium)

Väglängd Stråle B, $LB = 2 \cdot d \cdot n_{såpa}$ (inget fasskifte)

Väglängdsskillnad = $DL = LB - LA = 2.6 \cdot d - 240 \cdot 10^{-9}$.

Destruktiv interferens om $DL = (m+0.5) \cdot \lambda$, vilket ger $2.6 \cdot d - 240 \cdot 10^{-9} = (m+0.5) \cdot \lambda$. Det inses att ju lägre m , desto lägre d så vi sätter $m = 0$. Det ger $2.6 \cdot d = 480 \cdot 10^{-9}$ vilket innebär att $d = 184.6 \text{ nm}$.

6. Bilden efter objektivet hamnar i objektivets fokalpunkt. Förstoringen här är $i/p = 1/(6 \cdot 10^5)$ vilket ger en bild som är $67 \text{ } \mu\text{m}$. Förstoringen som krävs av okularet är alltså $1000/67 = 15$. Det ger för okularet att $i/p=15$. Vidare säger linsformeln att $1/i+1/p=1/f_{okular}$. Slutligen är den totala längden 150 cm , varav 100 cm redan använts av objektivet varför $i+p=50 \text{ cm}$. Tre samband och tre okända ($=i$, p och f_{okular}) går att lösa och $i = 3.125 \text{ cm}$, $p = 46.875 \text{ cm}$ och $f_{okular} = 29.3 \text{ mm}$.

7. Rayleighkriteriet begränsande. $103 \text{ tum} = 103 \cdot 2.54 \text{ cm} = 261.6 \text{ cm}$. Om alla pixlar är ekvidistanta måste vinkeln för diagonalen vara $\tan \phi = 1020/1920$ vilket ger $\phi = 28$ grader. Alltså är höjden $261.6 \cdot \sin(28) = 122.8 \text{ cm}$ och bredden $261.6 \cdot \cos(28) = 231 \text{ cm}$. Avståndet mellan pixlarna blir då $231/1920 = 0.12 \text{ cm} = 122.8/1020$. Det längsta pixelavståndet måste vara det som är intressant för att alla pixlar ska flyta ihop, d.v.s. det diagonala avståndet mellan två pixlar som är $\sqrt{0.12^2 + 0.12^2} = 0.17 \text{ cm}$.

Geometri ger att $\tan(\theta) = 0.17/L$ där L är avståndet från ögat till TV:n. Diffraktionsformeln för cirkulära öppningar ger för första minimum att $a \cdot \sin(\theta) = 1.22 \cdot \lambda$. Rayleigh säger att θ ska vara samma i båda fallen. Antar man nu en pupilldiameter på $a = 3 \text{ mm}$ och en naturfilm där $\lambda = 550 \text{ nm}$ så blir $\sin(\theta) = 1.22 \cdot 550 \text{ nm} / 3 \text{ mm} = 2.24 \cdot 10^{-4}$. Eftersom vinkeln är så pass liten gäller att $\sin(\theta) = \tan(\theta)$. Följdaktligen är $2.24 \cdot 10^{-4} = 0.17 \text{ cm} / L$ vilket ger att $L = 760 \text{ cm}$.

8.

a) Halvledare: Si, GaAs, InGaAs, AlInGaAs.

b) Genom dopning av olika områden.

c. Det krävs eftersom sannolikheten för stimulerade emission mellan två energinivåer är samma som

sannolikheten för absorption. För att signalen ska uppleva en nettoförstärkning måste det alltså finnas fler elektroner i den övre nivån än i den undre. Vid rumstemperatur är däremot förhållandet mellan populationen i den övre nivån och populationen i den undre nivån långt mindre än 1, ofta så lågt att den övre nivån i praktiken är tom. Dessutom, om man genom att tillföra energi har rubbat detta jämviktsförhållande, kommer elektroner i det övre tillståndet att ständigt söka sig tillbaka till det undre. Därför blir det kämpigt att åstadkomma populationsinversion.

d) När en viss våglängd når lasertröskeln kommer antalet fotoner av den våglängden att öka extremt i kaviteten. De kommer att genom stimulerad emission dra till sig all energi i kaviteten så att det inte blir något över till de andra våglängderna.

9. Vid oändligt objektavstånd hamnar bilden på fokallängds avstånd. Bilden ska naturligtvis hamna på näthinnan, så det innebär att när ett objekt befinner sig i oändligheten är linsens fokallängd 25 mm. När objektet ligger på avståndet $p = 250$ mm gäller formeln: $1/p + 1/i = 1/f$. Eftersom näthinnan knappast har flyttat på sig är $i = 25$ mm vilket ger $f = 22.7$ mm.

10. Om man ser 10 fransar per cm betyder det att avståndet mellan två fransar är 1 mm. Det innebär att när x ökar med $\Delta x = 1$ mm har tjockleken t ökat tillräckligt för att interferensmaximums ordning har ökat med ett, vilket är samma sak som att säga att fasskillnaden mellan stråle 1 och stråle 2 ökat med 2π . Det i sin tur innebär att våglängdsskillnaden ökat med λ . Ur figuren inses att våglängdsskillnaden ges av $2t$. Om våglängdsskillnaden har ökat med λ har alltså t ökat med $\Delta t = \lambda/2$.

Vidare ger ren geometri att $\tan \theta = \Delta t / \Delta x = (633 \cdot 10^{-9} / 2) / 1 \cdot 10^{-3} = 316.5 \cdot 10^{-6} \rightarrow \theta = 316.5 \cdot 10^{-6}$ rad. Det innebär att papperets tjocklek, d.v.s. t vid slutet av glasplattorna, är $25 \text{ cm} \cdot \tan \theta = 79 \mu\text{m}$.

11a. Dopämnena tillför materialet laddningsbärare (elektroner och hål) som kan användas för önskade funktioner, t.ex. switcha transistorer eller omvandlas till ljus i en halvledarlaser.

Laddningsbärarna är alltså informationsbärarna.

b. Laserdioden består av en pn-övergång i vilken vi matar in ström i form av elektroner och hål. Dessa rekombinerar i pn-övergången under utsändande av fotoner. I pn-skiktet förstärks ljuset via stimulerad emission av rekombinerande laddningsbärare. Det studsar fram och tillbaka mellan ändytorna (partiellt reflekterande speglar) på diod-chipet och de våglängder som både stämmer med bandgapet och kavitetsvillkoret förstärks och laservågen byggs upp.

Bild enl. Föreläsningssanteckningarna...

12. För att vi skall få konstruktiv interferens i reflexion måste ljuset från två intilliggande fjäll ha färdats en skillnad i sträcka på $2d = m\lambda$. Minsta avståndet $\Rightarrow m=1$. Ansätt en våglängd i det blå området, t.ex. $\lambda = 450 \text{ nm} \Rightarrow d = 225 \text{ nm}$.

13. a. Repetitionsfrekvensen ges av omloppstiden. Tiden för pulsen att gå ett varv i kaviteten är $T = c/O.L.$ (O.L. = optiska våglängden = $2(1.40 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2) = 3 \text{ m}$, dvs. $T = 10 \text{ ns}$). Repetitionsfrekvensen blir då $f_{\text{rep}} = 1/T = 100 \text{ MHz}$.

b. Svaret i a säger att det kommer 10^8 pulser/s. Energin blir då $E_{\text{puls}} = P_{\text{medel}} / f_{\text{rep}} = 10 \text{ nJ}$.

Toppeffekten $P_{\text{topp}} = E_{\text{puls}} / t_{\text{puls}} = 10^{-8} / 100 \cdot 10^{-12} = 100 \text{ W}$.

c. $\Delta\nu = 1/2\pi \cdot 100 \text{ ps} = 1.6 \text{ GHz}$.

14. Strålen skall expanderas från 2 mm till 10 mm för att fylla den fokuserande slutlinsen ($f = 8\text{mm}$).

Kvoten mellan fokalavstånden för teleskopet ges av $m = -\frac{f_{obj}}{f_{okular}}$, med $m=5$. Minustecknet talar om

att bilden inverteras vilket saknar betydelse i detta problem. Eftersom teleskolinserna har diametern 20 mm ställer de inte till några problem i avbildningen (strålen skall ju expanderas till 10mm). Vi kan nu välja den givna linsen antingen som okular eller objektiv.

I. $f_{obj} = 20\text{ mm} \Rightarrow f_{okular} = 4\text{ mm}$

II $f_{okular} = 20\text{ mm} \Rightarrow f_{obj} = 100\text{ mm}$

Fokus till linserna skall sammanfalla, dvs. i ena fallet får vi en totallängd på 24 mm och I andra 120 mm. .a.

15. Diffractionsvinkeln till fläcken med diametern d ges av $\sin \theta = \frac{1.22\lambda}{d}$. Den fokuserande kinsen

med diametern D bryter ihop strålen undersamma vinkelkon dvs. $\tan \theta = D/2f = 10/2 \cdot 8 \Rightarrow \theta = 32^\circ$.

Med $\lambda = 1064\text{ nm}$ fås nu att $d = 2.45\ \mu\text{m}$.

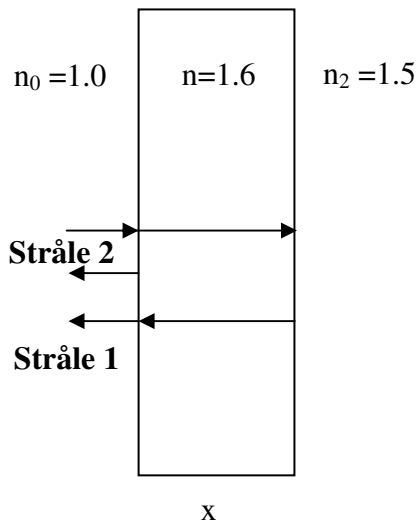
b. Intensiteten $I = P/A$. I fokus på fläcken och räknat på toppeffekten $P_{topp} = 100\text{W}$ (tal 5) blir $I = 100/\pi r^2 = 21\text{ TW/m}^2$.

(räknat på medeleffekt blir det 200GW/m^2 – fast ablationen sker bara när pulsen är närvarande, alltså ingen bestående värmerelaterad effekt)

16.a. I Pumpning från den lägsta nivån (grundnivån) till den översta. II. Relaxation till mellannivån.

III. Rekombination (lasring) till grundnivån. Energiskillnaden är ur figuren ca. $1.75\text{ eV} \Rightarrow \lambda = 710\text{ nm}$.

17.



Stråle 1 passerar genom första ytan, reflekteras mot den andra och passerar ut genom den första ytan. Stråle 2 reflekteras direkt mot den första ytan. Ansätt tjockleken hos filmen till x .

En allmän våglängd betecknas λ . Våglängden 1550 nm betecknas λ_s . m_s är interferensordningen för reflektionen av våglängden 1550 nm .

Eftersom $n_2 < n$ får stråle 1 inget fasskifte vid sin reflektion. Eftersom $n > n_0$ gör stråle 2

däremot det, ett fasskifte på π vilket motsvarar $\lambda/2$.

Optisk väglängd för stråle 1 blir därför $L_1 = 2xn$ medan optisk väglängden för stråle 2 blir enbart fasskiftet; $L_2 = \lambda/2$.

Väglängdsskillnaden blir $\Delta = L_1 - L_2 = 2xn - \lambda/2$. Konstruktiv interferens, d.v.s. hög reflektans som strålarna är definierade, fås för våglängder som uppfyller villkoret $\Delta = m\lambda$. Det ger $2xn - \lambda/2 = m\lambda$ vilket leder till $2xn = (m+0.5)\lambda$. Våglängden 1550 nm skall reflekteras varför villkoret blir $2xn = (m_s+0.5)\lambda_s$ vilket leder till att $x = ((m_s+0.5)\lambda_s)/2n$

För ett x givet av formeln ovan ges maxima också för alla andra våglängder som uppfyller $2xn = (m+0.5)\lambda$. För något av dessa m ska våglängden 930 nm reflekteras.

$m_s = 0$ ger $x = 242$ nm. Det innebär att för $m = 1$ blir det en reflektion för $\lambda = 774$ nm och för högre m sjunker våglängden. Alltså kan inte $m_s = 0$ eftersom 930 nm inte reflekteras då. Vi försöker då med $m_s = 1$ vilket ger $x = 727$ nm. Det ger också reflex för $m = 2$ med $\lambda = 930$ nm vilket är sökt. Svar: Filmens tjocklek är 727 nm.

18.a. Med objektet i oändligheten hamnar bilden på fokallängds avstånd, d.v.s. $l_1+l_2 = 8.5$ mm.

b. Flytta linsen 3% => ändra bildavståndet 3%. $0.97 \cdot i = 8.5$ mm ger $i = 8.75$ mm.

Avbildningsformeln ger då; $p^{-1} + i^{-1} = f^{-1}$ dvs. $p = 277$ mm.

c. Bilden blir inverterad men den vänds sen tillbaks av spegeln i den ena riktningen.

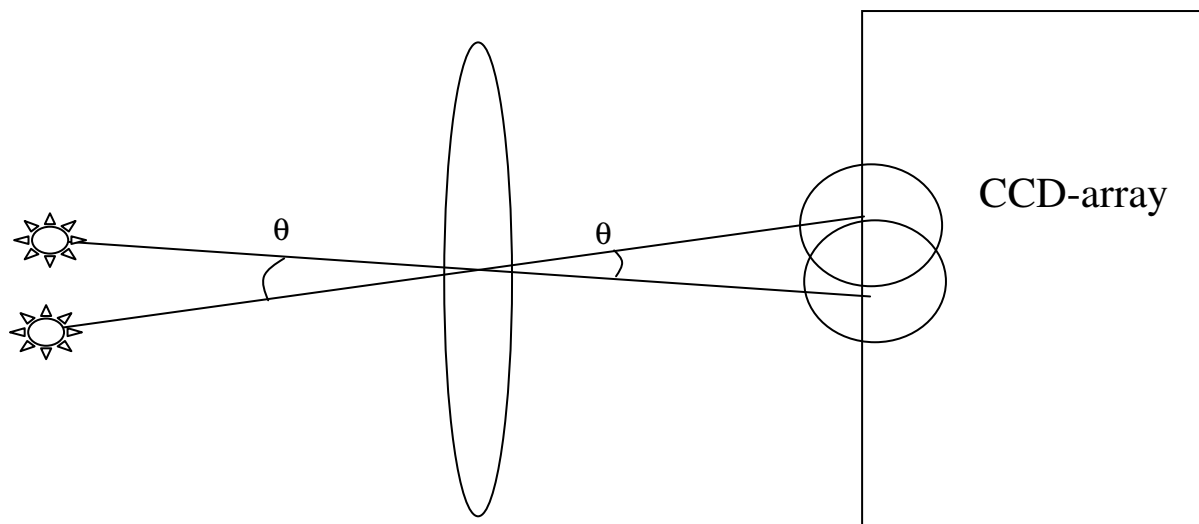
19.a. Diffraction i linsen begränsar upplösningen.

b) Enligt Rayleigh-kriteriet för upplösning gäller att $D \cdot \sin\theta = 1.22\lambda$ för den minsta vinkelseparation θ som överhuvudtaget kan upplösas efter diffractionen. Vinkelseparationen θ är samma på väg mot linsen som ut ur linsen, vilket inses om man betraktar de ljusstrålar som träffar mitt i linsen. Om pixlarna befinner sig närmare varandra än vad som ges av vinkelseparation θ ur Rayleighkriteriet har man slutat vinna upplösning. Rayleighkriteriet ger att intensitetsmax för en punkt skall hamna på min. för nästa punkt. Det är detsamma som att avståndet mellan två punkter svarar mot diffractionsupplösningen (rita och se!). Vi kallar detta avstånd (pixelavståndet = pixellängden) Δx , och då gäller att $\tan \theta \approx \theta = \Delta x / f = \Delta x / (l_1+l_2)$. (små vinklar)

För en kvadratisk array blir sen antalet pixlar, $N = (L/\Delta x)^2$. Allt detta sammantaget ger med $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$, att $D \cdot L / (\sqrt{N} \cdot (l_1+l_2)) = 1.22 \lambda$ eller med andra ord:

$$N = \left[\frac{D \cdot L}{1.22 \cdot (l_1 + l_2) \cdot \lambda} \right]^2$$

Sätter vi in $l_1+l_2 = 8.5$ mm och antar rimliga värden på diameter och CCD storlek, t.ex., $D = 3$ mm, $L = 3$ mm och $\lambda = 550$ nm får vi $N = 2.5$ Mpixel.



20. EM strålningen är en vågrörelse. Varje punkt i vågen är en källa för sekundära sfäriska vågor (Hugens princip). När punktkällorna vid kanten skickar ut sina sekundära vågor sker det i alla riktningar. Amplituden blir lägre bortom hörnet då energin måste bevaras i vågen.

21. Förstoringen är $3000/24 = 125$ ggr. Detta medför att bildavståndet måste vara 125 ggr större än objektavståndet, dvs. $\frac{1}{p} + \frac{1}{125p} = \frac{1}{f}$. Vidare gäller att $p+i = p + 125p = 40$ m, vilket ger $p = 317.5$ mm, som i sin tur ger $f = 315$ mm.

22. Fläckarnas placering ges av diffraktionsformeln $d \sin \theta = m\lambda$. Enligt figuren gäller diffraktion av andra ordningen ($m=2$). Längre våglängder har större diffraktionsvinklar, dvs för 515 nm gäller $\theta = \arcsin(4.0/6.0) = 48.2^\circ$. Då blir avståndet mellan spåren, $d = 1.5 \mu\text{m}$.

23. a. Ljusledning bygger på totalreflexion. I en fiber är brytningsindex i kärnan högre än i manteln.

b. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

c. Lasern består av ett lasermedium, en pumpenhet och speglar. Pumpning måste ske så att förstärkningen (stimulerad emission) överstiger förlusterna.

d. Laserdioden är ett litet halvledarchip med ett p-dopat och ett n-dopat område. Elektroner och hål rekombinerar i pn-övergången under utsändande av ljus när en spänning (som leder till en ström ($U=RI$)) läggs över den. Ljuset reflekteras (partiellt) fram och tillbaka mellan de klyvna halvledarytorna (speglarna) och vid en tillräckligt hög pumpning (ström) leder det till att den stimulerade emission dominerar över förlusterna och ljuskällan övergår från att vara en lysdiod till en laser.

e. $E_g = hc/\lambda$

24. a. Avståndet till objektet är $p_1 = 4$ m resp. $p_2 = 8$ m eftersom objektet till kameran är din spegelbild som ligger 2 m resp. 4 m bakom spegeln. Använd linsformeln för att bestämma bildens

läge i förhållande till linsen, $\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{p}$. Förflyttningen av bilden relativt linsen blir då

$$\Delta i = i_1 - i_2 = 5.063 \cdot 10^{-2} - 5.031 \cdot 10^{-2} = 0.3 \text{ mm}.$$

b. Förstoringen $m = -\frac{i}{p} = \frac{0.050}{8} = -0.00625$ och $|m| = \frac{h'}{h}$ med din egen längd h (min = 184 cm) kan

det t ex bli $h' = 11.5$ mm. Objektet är rättvänt och bilden på filmen blir alltså inverterad (p.ga. minustecknet och den reella bilden).

c. En pixel har sidlängden 13 μm . Bilden av dig (om du är 184 cm lång) blir då $11.5 \text{ mm}/13 \mu\text{m} = 874$ pixel.

25. Vinkelupplösningen för objektivet är $\alpha = \frac{r}{f} = \frac{1.22\lambda f}{Df} = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{1.22 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{50 \cdot 10^{-3}} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$.

(med diametern, $D=50 \text{ mm}$ och $\lambda=500 \text{ nm}$)

För detektorn gäller att det närmaste två punkter kan ligga varandra, för att vi skall kunna upplösa

dem, är lika med avståndet mellan pixlarna, r , $\frac{r}{f} = \tan \alpha \approx \alpha = \frac{13 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3}} = 26 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$.

Objektivet kan alltså upplösa mindre vinklar och det blir alltså detektorns vinkelupplösning som är den begränsande faktorn.

26. Både strålen som faller in mot MgF_2 filmen och den som passerar filmen och träffar glaslinsen kommer att reflekteras mot tätare medium och får ett fasskift på π . Det ackumulerade fasskiftet för de två strålarna blir

$$k_1 = \pi \text{ och } k_2 = \frac{2\pi n}{\lambda} 2L + \pi,$$

För utsläckning (destruktiv interferens) gäller att de skall vara ur fas, dvs. $k_2 - k_1 = m2\pi + \pi$

dvs. med $m=0$ blir $k_2 - k_1 = \frac{2\pi n}{\lambda} 2L = \pi \Rightarrow L = \frac{\lambda}{4n} = 100 \text{ nm}$.