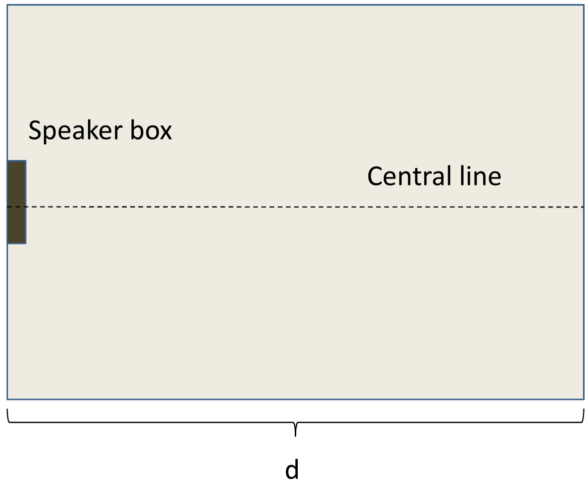
Övning 4 - Kapitel 36

8(10)*.



Sökt: Avståndet till förstra minimat, vi kallar det x.
Givet: Bredd på öppning, a = 30,0 cm; hastighet v = 343 m/s; frekvens, f = 2500 Hz; d = 100 m.

Lösning:
Vi använder formeln för diffraktion i en enkel spalt, Eq. (36-3), dvs sin(θ) = $m\lambda/a$ (m = 1 i vårt fall). Med hjälp av Pytagoras sats kan sin(θ) även skrivas:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

Sätter vi ihop uttrycken för sin(θ) får vi:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{\lambda}{a} \to \frac{x^2}{x^2+d^2} = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \to x^2 = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 d^2 \to$$

$$x^2\left(1-\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\right) = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 d^2 \to x^2\left(\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\right) = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 d^2$$

$$\to x^2\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2\left(\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 - 1\right) = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 d^2 \to x^2\left(\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 - 1\right) = d^2$$

$$\to x^2 = \frac{d^2}{\left(\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 - 1\right)} \to x = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 - 1}} \to$$

$$\to \boldsymbol{x} = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{af}{v}\right)^2 - 1}} = \frac{100\ m}{\sqrt{\left(\frac{0{,}300\ m \cdot 2500\ Hz}{343\ m/s}\right)^2 - 1}} = \mathbf{51{,}4\ \boldsymbol{m}}$$

24(22)*. Vi använder här formeln för diffraktion i en cirkulär apertur Eq. (36-12) $\sin(\theta) = \frac{1.22\lambda}{d}$. Den givna vinkeln täcker hela minimat och måste därför halveras: θ = 2.0°/2 = 1.0°. Vi får då att aperturen som orsakar diffraktionen har storleken:

$$\boldsymbol{d} = 1{,}22\frac{\lambda}{\sin\theta} = 1{,}22\frac{550\cdot 10^{-9}\,m}{\sin 1^{o}} = \mathbf{38}\ \boldsymbol{\mu m}$$

19(27). (a) Vi använder oss här av Rayleigh kriteriet $\sin(\theta) = \frac{1.22\lambda}{a}$ vilket är samma som avståndet till första minimat för diffraktion i en cirkulär apertur. Om vinkeln är liten (vilket den är) kan vi approximera sinus för vinkeln med vinkeln vilket ger $\sin(\theta) = \tan(\theta) = \frac{d}{L} = \frac{1.22\cdot\lambda}{a}$ där L är det sökta avståndet och d är gränsen för vår upplösningsförmåga. Vi får då (med $d = 2\cdot 50\cdot 10^{-6}m$ eftersom det är radien som ges):

$$L = \frac{d}{1.22\lambda / a} = 0.19m$$

(b) Eftersom våglängden för blått ljus är kortare och $L_{\max} \propto \lambda^{-1}$ kommer $L_{\max}$ bli större.

33(31). Vinkeln till första minimat blir för små vinklar (Rayleigh vinkeln (i radianer)):

$$\theta_R = \frac{1.22\lambda}{d} = \frac{D}{L}$$

Där d är diffraktionsaperturen, D är avståndet till första minimat och L är avståndet mellan öppningen och målet. (se exempelproblem 36.3)

(a) Vi löser för D givet att $\lambda = 1.40 \times 10^{-9}$ m, $d = 0.200 \times 10^{-3}$ m, och $L = 2000\times 10^{3}$ m. Vi får då D = 17.1 m vilket ger en diameter på 34.2 m.

(b) Intensitet är effekten över arean som är proportionell med radien i kvadrat om vi antar en cirkulär area. Vi får då att ration av intensiteter ges av ration av radierna i kvadrat dvs. $(d/2D)^2 = 3.42 \times 10^{-11}$.

42(40). (a) Vi vet att interferensmaximat för en dubbelslit uppfyller följande samband:

$d\sin(\theta) = m \cdot \lambda$ och att första diffraktionsminimat uppfyller $a\sin(\theta) = 1 \cdot \lambda$. Vi vill alltså att 4e (*m=4*) interferensmaximat ska överlappa första minimat och får därför: $\frac{d\sin(\theta)}{a\sin(\theta)} = \frac{4\lambda}{\lambda}$ vilket ger $d/a = 4$. (se exempelproblem 36.5).

(b) Vi söker alltså vilka andra ordningar av interferensmaxima *(m_1)* och diffraktionsminima *(m_2)* som kommer överlappa. Vi kan skriva villkoret för att vinklarna ska överlappa som innan dvs:

$$\sin\theta = \frac{m_1\lambda}{d} = \frac{m_2\lambda}{a} = \frac{m_1\lambda}{4a} \quad ,$$

Där vi satt in det redan kända sambandet mellan d och a. Vi får då $m_1 = 4m_2$ där $m_2 = 1, 2, 3, \cdots$. De interferenslinjer som kommer saknas är då 4th, 8th, 12th, osv. Var 4 linje kommer alltså försvinna.

39(41). (a) Det första diffraktionsminimat är vid 5.00°, vilket ger

$$a = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{0.440\,\mu\text{m}}{\sin 5.00°} = 5.05\,\mu\text{m} \; .$$

(b) Eftersom 4e interferensfransen saknas får vi, $d = 4a = 4(5.05\ \mu\text{m}) = 20.2\ \mu\text{m}$.

(c) Intensiteten i en given vinkel vid tvåspaltsinterferens ges av:

$$I(\theta) = \mathrm{I}_{\max} \cdot \left(\cos^2(\beta)\right) \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)^2 \text{ där } \beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin(\theta) \text{ och } \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin(\theta)$$

Eftersom vi är intresserade av interferensmaxima kommer cosinustermen vara 1 eftersom beta är en multipel av pi.

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = m\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda m}{d}$$

Nu kan vi sätta in uttrycket för sinθ i uttrycket för α

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = \frac{\pi a}{\lambda}\frac{\lambda m}{d} = \frac{\pi a m}{d} = \{d = 4a\} = \frac{\pi m}{4}$$

Intensiteten som funktion av *m* blir

$$I(m) = I_{max}\left(\frac{\sin(\pi m/4)}{\pi m/4}\right)^2$$

$$I(m=1) = 7{,}0\left(\frac{\sin(\pi 1/4)}{\pi 1/4}\right)^2 \ {}^{mW}\!/_{cm^2} = 5{,}7 \ {}^{mW}\!/_{cm^2}$$

$$I(m=2) = 7{,}0\left(\frac{\sin(\pi 2/4)}{\pi 2/4}\right)^2 \ {}^{mW}\!/_{cm^2} = 2{,}8 \ {}^{mW}\!/_{cm^2}$$

Vilket stämmer väl med figuren.

51(49). (a) Eftersom d = (1.00 mm)/180 = 0.0056 mm, kan vi skriva Eq. 36-25 som

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}(180)(2)\lambda$$

där $\lambda_1 = 4\times 10^{-4}$ mm och $\lambda_2 = 5\times 10^{-4}$ mm. Vi får då, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2.1°$.

(b) Eftersom vi vill att vinklarna ska överlappa kan vi skriva

$$\sin(\theta) = \frac{m_1\lambda_1}{d} = \frac{m_2\lambda_2}{d} \quad \text{vilket ger} \quad m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$$

Sätter vi in vågländerna ser vi att det minsta värdet är m_1 = 5 and m_2 = 4. Sätter vi in detta i ekvationen för gitterdiffraktion ser vi att

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{m_1\lambda_1}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5(4.0\times 10^{-4}\ \text{mm})}{0.0056\ \text{mm}}\right) = \sin^{-1}(0.36) = 21°.$$

(c) Eftersom vi inte kan ha diffraktion i större vinklar än 90°, kan vi lösa för "$m_{\max}$" (även om det inte blir ett heltal):

$$m_{\max} = \frac{d\sin 90°}{\lambda_2} = \frac{d}{\lambda_2} = \frac{0.0056\ \text{mm}}{5.0\times 10^{-4}\ \text{mm}} \approx 11$$

Där vi har rundat av nedåt.

49(51). (a) Maxima från ett diffraktionsgitter fås vid vinklarna θ som uppfyller $d \sin \theta = m\lambda$, där d spaltseparationen, λ är våglängden och m är ett heltal. Om vi låter m ordningen för linjen med $\sin \theta = 0.2$ och $m + 1$ vara ordningen för linjen med $\sin \theta = 0.3$ får vi $0.2d = m\lambda$ and $0.3d = (m + 1)\lambda$. Vi drar ifrån den ena från den andra och får $0.1d = \lambda$, eller

$$d = \lambda/0.1 = (600 \times 10^{-9}\text{m})/0.1 = 6.0 \times 10^{-6}\ \text{m}.$$

(b) Minimat för diffraktionsmönstret för en enkelspalt uppstår vid vinklarna θ som ges av $a \sin \theta = m\lambda$, där a är spaltbredden. Eftersom 4e ordningens interferensmaxima är borda måste minimat ligga där. Om a är minsta spaltbredden uppfyller vinkeln sambandet $a \sin \theta = \lambda$. Samtidigt uppfyller interferensen sambandet $d \sin \theta = 4\lambda$, vilket som i tidigare tal ger:

$$a = d/4 = (6.0 \times 10^{-6}\ \text{m})/4 = 1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}.$$

(c) Vi sätter $\theta = 90°$ för att hitta det största värdet på m som uppfyller $m\lambda < d \sin \theta$. Det ger vilkoret $m < d/\lambda$ vilket ger:

$$d/\lambda = (6.0 \times 10^{-6}\ \text{m})/(600 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 10.0,$$

Den högsta synbara ordningen är alltså $m = 9$. Eftersom 4e och 8e ordningen saknas är de observerbara ordningarna $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7,$ och 9. Svaret på c), d) och e) är alltså 9, 7 och 6 respektive.

60(58). Upplösningsgränsen ges av $R = \lambda/\Delta\lambda = Nm$, där λ är medelvåglängden, $\Delta\lambda$ är minsta skillnaden i våglängd, N är antalet fransar och m är ordningen. Vi löser för N:

$$N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda} = \frac{(589{,}6 - 589{,}0)/2}{2 \cdot 0{,}6} = 491$$

69(67). Enligt Bragg's lag får vi diffraktionsmaxima för följande vinklar:

$$2d \sin\theta = m\,\lambda$$

där d är avståndet mellan kristallplanen och λ är våglängden. Notera att vinkeln mäts från ytan av planen. För andra ordningens reflektion $m = 2$, får vi:

$$d = \frac{m\lambda}{2\sin\theta} = \frac{2\left(0.12\times10^{-9}\,\mathrm{m}\right)}{2\sin 28°} = 2.56\times10^{-10}\,\mathrm{m} \approx 0.26\,\mathrm{nm}.$$

77(79). När spalten blir mindre sprider sig mönstret utåt och vi söker därför de ordningar av diffraktionsminimum som överlappar för de två våglängderna. Om vi benämner dom m (för $\lambda = 600$ nm) och m' (för $\lambda' = 500$ nm) och noterar att vinklarna är samma får vi med hjälp av $\sin(\theta) = \dfrac{m\lambda}{a}$

$$m\lambda = m'\lambda'$$

Vilket ger oss $m = 5$ och $m' = 6$. Spaltbrädden får vi från samma ekvation:

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} \approx \frac{m\lambda}{\theta}$$

Vilket ger $a = 3.0$ mm.