Lösningsförslag till Tentamen i 5A1225 Elektricitets- och vågrörelselära för K och Bio och I to den 28 aug 2008 kl 8-13

1. Om man studerar relationen $E = -gradV = -\frac{dV}{dx}$ inser man att Diagram 1 representerar den elektriska fältstyrkan E. Man vet att $E = 0$ inuti sfären och att E är diskontinuerlig i gränsen $r = r_a$. Beror som $1/r^2$ utanför sfären.
Diagram 2 representerar alltså porentialen V som är konstant $\neq 0$ inuti sfären (stämmer överens med relationen ovan, $E = 0$) och avtar som $1/r$ utanför sfären och är kontinuerlig i $r = r_a$.
Svar: Diagram 1 representerar E, diagram 2 representerar V.

2. Rayleighvillkoret ger för:

a) $\theta_{crit} = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{120} \Rightarrow x = 1{,}22 \cdot 120 \cdot \frac{\lambda}{d_{pilot}} = 1{,}22 \cdot 120 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 3{,}2$ cm

b) $\theta_{crit} = 1{,}22\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{120} \Rightarrow x = 1{,}22 \cdot 120 \cdot \frac{\lambda}{d_{örn}} = 1{,}22 \cdot 120 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{6{,}2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}3$ cm

Svar: Piloten kunde lösa upp föremål på avståndet 3,2 cm på marken, örnen på 1,3 cm, dvs ca en faktor 2,5 bättre.

3. Gauss sats! Innesluten laddning beror på hur stor volym som är innesluten av den gaussiska ytan som är en sfär.

Gauss sats blir inuti: $\int E dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 K} = \frac{\rho \cdot V_r}{\varepsilon_0 K} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0 K} \Rightarrow$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0 K} \Leftrightarrow E = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0 K} \text{ dvs linjärt beroende inuti neoprenet}$$

Utanför sfären fås med Gauss sats: $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_a^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot r_a^3}{3\varepsilon_0 \cdot r^2}$ dvs samma uttryck som från en punktladdning proportionellt mot $1/r^2$. Inget K med i luft.
Den elektriska fältstyrkan blir i gränsen $r = r_a$: $E = \frac{\rho \cdot r_a}{3\varepsilon_0 K} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 8{,}852 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}7} = 1124$ V/m

Svar : Innanför neoprensfären: $E = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0 K}$, utanför: $E = \frac{\rho \cdot r_a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$,
I gränsen $r = r_a$: $E = 1124$ V/m.

4. Def av β dB för ljudintensitet I är: $10\log I/I_0$, där $I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$ och $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ W/m^2.

Man får $\beta_A - \beta_B = 10\log\frac{I_A}{I_0} - 10\log\frac{I_B}{I_0} = 10\left[\log\frac{I_A}{I_B}\right] = 10\left[\log\frac{r_B^{\,2}}{r_A^{\,2}}\right]$, P antas lika för de två skyttarna.

$\beta_A - \beta_B = 10$ dB och $r_B = r_A + 40$ m ger $10\left[\log\frac{(r_A+40)^2}{r_A^{\,2}}\right] = 10 \Rightarrow \frac{(r_A+40)^2}{r_A^{\,2}} = 10^1$ vilket ger

$r_A = 18{,}5$ m och $r_B = 58{,}5$ m
Svar: $r_A = 18{,}5$ m och $r_B = 58{,}5$ m.

5. Frekvensen ändras totalt 95 Hz, dvs ökning 47,5 Hz mot och minskning 47,5 Hz från.
Man får för dopplereffekt vid färd mot larmet:

$$f_1 = f_0\left(1 + \frac{v_{cykl}}{c}\right) \Leftrightarrow \Delta f = |f_1 - f_0| = f_0\frac{v_{cykl}}{c} \Rightarrow v_{cykl} = \frac{c \cdot \Delta f}{f_0} = \frac{343 \cdot 47{,}5}{960} = 17\ \text{m/s} = 61\ \text{km/h}$$

Svar: Hastigheten för cyklisten blev 61 km/h.

6. Det är en plattkondensator där C ändras vid konstant spänning. Ändringen i laddningen ger strömmen genom def $I = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ där ΔQ fås ur sambandet $Q = VC$, dvs $\Delta Q = V \cdot \Delta C$

med $\Delta C = \varepsilon_0 SV\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right] = 5{,}9 \cdot 10^{-12}$ As vilket gäller för en plattkondensator.

Vi får $\Delta Q = V \cdot \Delta C = 10 \cdot 5{,}9 \cdot 10^{-12} = 59$ pA

Strömmen blir $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{59 \cdot 10^{-12}}{0{,}01} = 0{,}59$ nA
Svar: Strömmen blir ca 0,6 nA.

7. Systemet blir en dipol! För fjärrfälten både axiellt (som i uppgiften) och vinkelrätt mot symmetriaxeln mellan laddningarna beror den elektriska fältstyrkan som $1/r^3$.

Svar: Den elektriska fältstyrkan beror som $1/r^3$.

8. Ohms lag med $j\omega$-metoden blir:

$V_{out} = V_{in}\dfrac{j\omega L}{R + j\omega L} \Rightarrow$ storleken blir $V_{out} = V_{in}\dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \approx 16$ V förutsatt att 20 V är effektivvärdet. Om man betraktar $\lim\limits_{\omega\to\infty} V_{out}$ och $\lim\limits_{\omega\to 0} V_{out}$ för

$V_{out} = V_{in}\dfrac{j\omega L}{R + j\omega L} = V_{in}\dfrac{jL}{\dfrac{R}{\omega} + jL}$ får man att $\lim\limits_{\omega\to\infty} V_{out} = 1$, dvs ett högpassfilter.

Pss blir $\lim\limits_{\omega\to 0} V_{out} = 0$, dvs signalen försvinner för lågfrekventa signaler.

Svar: $V_{out} = 16$ V och filtret är ett högpassfilter.

9. Kirchhoffs lagar ger med I_1 åt höger genom R_1, I_2 nedåt genom R_2 och I_3 nedåt genom R_3:

A) Vandring åt höger i loop 1: $15{,}5 - R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 = 0$ (1)

B) Vandring åt höger i loop 2: $R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = 0$ (2)

C) Vandring åt höger i yttre loop 3: $15{,}5 - R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 = 0$ (3)

$I_1 = I_2 + I_3$ (4)

(4) i (1) ger (1′):

$15{,}5 - R_1 \cdot (I_2 + I_3) - R_3 \cdot I_3 = 0 \Leftrightarrow 15{,}5 - R_1 \cdot I_2 - R_1 \cdot I_3 - R_3 \cdot I_3 = 0 \Leftrightarrow$

$15{,}5 - R_1 \cdot I_2 - (R_1 + R_3) \cdot I_3 = 0$ (1')

(2) ger: $I_2 = \dfrac{R_3 \cdot I_3}{R_2}$ vilket sätts in i (1'):

$$15{,}5 - R_1 \cdot \frac{R_3 \cdot I_3}{R_2} - (R_1 + R_3) \cdot I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{15{,}5}{R_1 \cdot \dfrac{R_3}{R_2} + R_1 + R_3} = \frac{15{,}5}{1000 \cdot \dfrac{1500}{1250} + 1000 + 1500} = 4{,}2\text{ mA}$$

Ur (2): $I_2 = \dfrac{R_3 \cdot I_3}{R_2} = \dfrac{1500 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}}{1250} = 5$ mA

Ur (4): $I_1 = I_2 + I_3 = 5 + 4{,}2 = 9{,}2$ mA

Svar: $I_1 = 9{,}2$ mA, $I_2 = 5$ mA och $I_3 = 4{,}2$ mA.

10. Antireflexskiktet ska ha ett brytningsindex mellan vattens 1,33 och glasets 1,77. Reflexerna lika starka när $n_{antireflex}$ ligger mitt emellan n_{vatten} och n_{glas} vilket ger bra verkan av antireflexskiktet. Det gäller, vilket kan härledas ur uttryck för reflexionskoefficienten med vissa approximationer, $n_{antireflex} = \sqrt{n_{vatten} \cdot n_{glas}}$ vilket ger $n_{antireflex} = \sqrt{1{,}33 \cdot 1{,}71} = 1{,}51$.

Svar: Lika starka och bra verkan om $n_{antireflex}$ ligger mitt emellan n_{vatten} och n_{glas}. Bästa valet är $n_{antireflex} = 1{,}51$.