

Lösningförslag till tentamen i Elektricitets-och vågrörelselära för K, Bio 140110.

A1. Dopplereffekt för rörlig källa (bilen) ger en bit bort från cirkelbanan följande frekvenser.

$$f' = f_0 \frac{c}{c \pm v}, \text{ med hastighet för bilen } v = \omega r = 2\pi r \cdot \frac{\text{antalet varv}}{s} = 2\pi \cdot 1 \cdot 1,2 = 7,5 \text{ m/s}$$

Det ger $f' = f_0 \frac{c}{c \pm v} = 1200 \frac{344}{344 \pm 7,5}$. Maximala frekvensen blir 1227 Hz, minimala 1174 Hz.

Svar: Maximal frekvens blir 1227 Hz, minimal blir 1174 Hz.

A2. Superpositionsprincipen och Coulombs lag tillämpas.

Totala elektriska fältet bildas av vektorsumman

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 &= -k \frac{q_1}{r_1^2} \mathbf{e}_1 + \left[-k \frac{q_2}{r_2^2} \mathbf{e}_2 \right] = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-4}} \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} + \left[-9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-4}} \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} \right] = \\ &= [-3,464 \cdot (1,1,1) - 2,45 \cdot (1,2,1)] \cdot 10^7 = -(5,910,8360,5910) \cdot 10^4 \text{ V/m} \approx -(5,9;8,4;5,9) \cdot 10^7 \text{ V/m} \\ &\Rightarrow |\mathbf{E}_{tot}| \approx 11,8 \cdot 10^7 \text{ V/m} \end{aligned}$$

Svar: $\mathbf{E}_{tot} = -(5,9;8,4;5,9) \cdot 10^7 \text{ V/m}$ och storleken är $\|\mathbf{E}_{tot}\| = 11,8 \cdot 10^7 \text{ V/m}$.

A3. Med Kirchhoffs lagar blir strömmarna:

Genom 100 Ω motståndet: $I_{100} = 2,9 \text{ mA}$ riktad åt vänster genom motståndet.

Genom 200 Ω motståndet: $I_{200} = 6,4 \text{ mA}$ riktad åt vänster genom motståndet.

Genom 400 Ω motståndet: $I_{400} = 9,3 \text{ mA}$ riktad åt höger genom motståndet.

Svar: Se ovan.

A4. Grundfrekvensen ges av $600 - 480 = 120 \text{ Hz}$.

Fast inspänd sträng i båda ändar har egenvärdena för f enligt $f_n = n \frac{v}{2L}$, vilket ger

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2L}, \text{ och } L = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{2f_1} = \frac{\sqrt{\frac{12}{2,6 \cdot 10^{-3}}}}{2 \cdot 120} = 28,3 \text{ cm. Längden motsvarar en mindre gitarr. En vanlig gitarr har stränglängden 650 mm.}$$

Svar: Grundfrekvensen var 120 Hz och stränglängden 28,3 cm.

A5. Ersättningsinduktansen blir $L_{ekv} = \frac{L \cdot L}{L+L} = \frac{L}{2} = 10 \text{ mH}$, dvs minskar till hälften.

Det kan visas med t ex komplexa uttrycket för parallellkopplade impedanser.

Svar: L_{ekv} blir 10 mH, hälften av $L = 20 \text{ mH}$.

B1. Integration ger $\int_0^a k \frac{dq}{r} = k \int_0^a \frac{\lambda dx'}{b+x'} = k\lambda \ln \left[\frac{b+a}{b} \right] = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{350 \cdot 10^{-9}}{50 \cdot 10^{-3}} \ln \left[\frac{55}{5} \right] \approx 150 \text{ kV}$
Laddningen är 350 nC på staven.

Svar: Potentialen var ca 150 kV i punkten P.

B2. Användninga av Malus lag ger

$$\text{Intensiteten efter andra polarisatorn: } I_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta_2 \quad (1)$$

$$\text{Intensiteten efter tredje polarisatorn: } I_3 = I_2 \cos^2 \theta_3 \quad (2)$$

$$(1) \text{ och } (2) \text{ ger } \theta_3 = \arccos \sqrt{\frac{I_3}{I_2}} = \arccos \sqrt{\frac{375}{450}} \approx 24,1^\circ.$$

Svar: Vinkeln var ca $24,1^\circ$.

B3. V_{in} sättes till riktfas, $\phi = 0$.

$$\text{Spänningsdelning ger allmänt : } V_{ut} = \frac{R}{R - j \frac{1}{\omega C}} V_{in} \quad (1)$$

$$\text{För spänningen över C : } V_C = \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{R - j \frac{1}{\omega C}} V_{in}$$

$$\text{a) Storleken av } V_{ut} \text{ ges av (spänningsdelning) } \Rightarrow V_{ut} = \frac{10}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 3,8 \text{ V}$$

$$\text{Storleken på } V_C \text{ över C är } V_C = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 6,0 \text{ V}$$

$$\text{b) Betrakta } V_{ut} = \frac{R}{R - j \frac{1}{\omega C}} V_{in} = \frac{R}{R - j \frac{1}{\omega C}} V_{in}$$

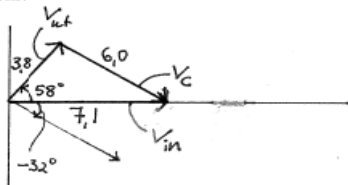
Man inser att $\lim_{\omega \rightarrow 0} V_{ut} = 0 \text{ V}$ och $\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{ut} = V_{in}$, dvs filtret är ett högpasfilter, höga frekvenser passerar.

$$\text{Fasvinkeln till } V_{ut} \text{ ges av } \phi = \arctan \frac{1}{\omega CR} \approx 58^\circ$$

$$\text{Fasvinkeln till } V_C \text{ ges av } \phi = \arctan \frac{1}{\omega CR} - 90^\circ = 58^\circ - 90^\circ = -32^\circ$$

Svar: a) Spänningen över R blir $3,8 \text{ V}$ b) Högpasfilter c) 58° d) $V_C = 6 \text{ V}$ med fasvinkel -32° .

Diagrammet blir:



B4. En rät linje med lutningen $k = 24,3 \cdot 10^{-8}$ m per frans ger ur ekvationen

$$\frac{1}{2}\lambda = 24,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \lambda = 2 \cdot 24,3 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 486 \text{ nm}, \text{ vilket innebär att vacuumvåglängden är } 1,33 \cdot 486 \text{ nm} = 646 \text{ nm}.$$

Svar: Vacuumvåglängden var ca 646 nm.

B5. Sambandet mellan S och E är $S = \frac{E^2}{\mu_0 c}$, vilket ger derivatan $\frac{dS}{dE} = \frac{2E}{\mu_0 c}$, vilket ger

$$E = \frac{1}{2} \frac{dS}{dE} \cdot \mu_0 c = \frac{1}{2} \cdot 63,7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 = 12 \text{ kN/C}.$$

Svar: Den elektriska fältstyrkan i laserstrålen var ca 12 kN/C.