Lösningsförslag till tentamen i SK1111 Elektricitets-och vågrörelselära 2012-10-18

A1. a) Örats resonansfrekvens ligger vid $f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 3400$ Hz.

b) Om man jämför i Fletcher-Munson-kurvan ser man att min ligger nära den frekvensen. Örat är alltså känsligast kring 3400 Hz för alla intensitets- eller trycknivåer.

Svar: Resonansfrekvensen för örat är ca 3400 Hz. Fletcher-Munson-kurvan har min nära den frekvensen för alla intensitets- eller trycknivåer.

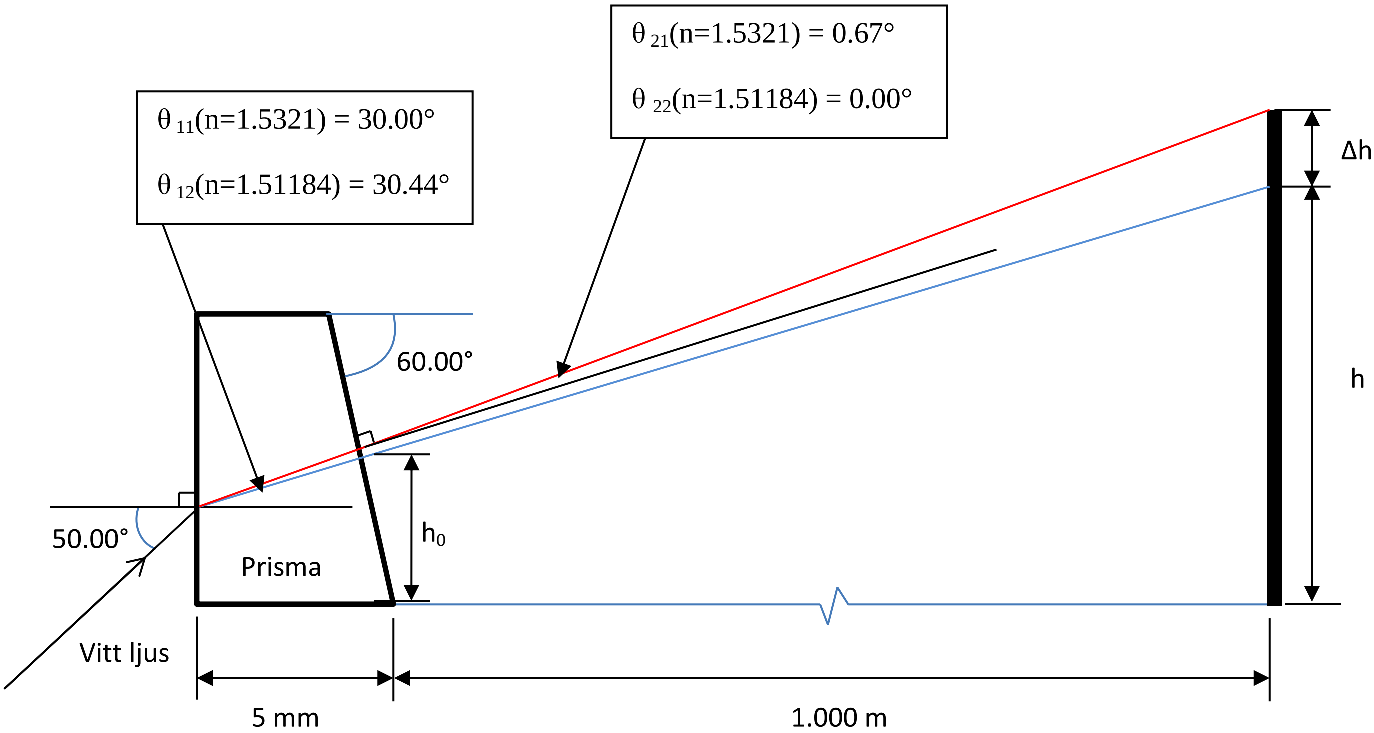
A2. $\boldsymbol{E} = -grad\ V = -grad\ \left[\frac{V_0}{2r_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)\right] = -\frac{V_0}{2r_0^2}(2x, 2y - 4z)$ V/m

$\xrightarrow{yields} \boldsymbol{E}(1,1,1) = -\frac{V_0}{2r_0^2}(2,2,-4) \cdot 10^{-3} = \frac{1000}{2(5{,}5 \cdot 10^{-3})^2}(-2,-2,4) \cdot 10^{-3}.$

Storleken är $\|\boldsymbol{E}\| = 81$ kV/m

Svar: Storleken på E är 81 kV/m.

A3. Snells brytningslag och geometri ger följande:



Första ytan:

Snells lag ger: θ_{11}(n=1.5321) = arcsin(sin(50°)/1.5321) = 30.00°

θ_{12}(n=1.51184) = arcsin(sin(50°)/1.51184) = 30.44°

Andra ytan: θ_{21}(n=1.51184) = arcsin (1.51184*sin(0.44°)) = 0.67°

θ_{22}(n=1.5321) = 0.00° pga infall i normalens riktning

”Regnbågens” bredd:

Δh = h(390 nm) – h(750 nm) ≈ [tan (30.00° + 0.67°) + h_0] – [tan (30.00°) + h_0] = <u>1.6 cm</u>

Svar: Regnbågens bredd var 1,6 cm.

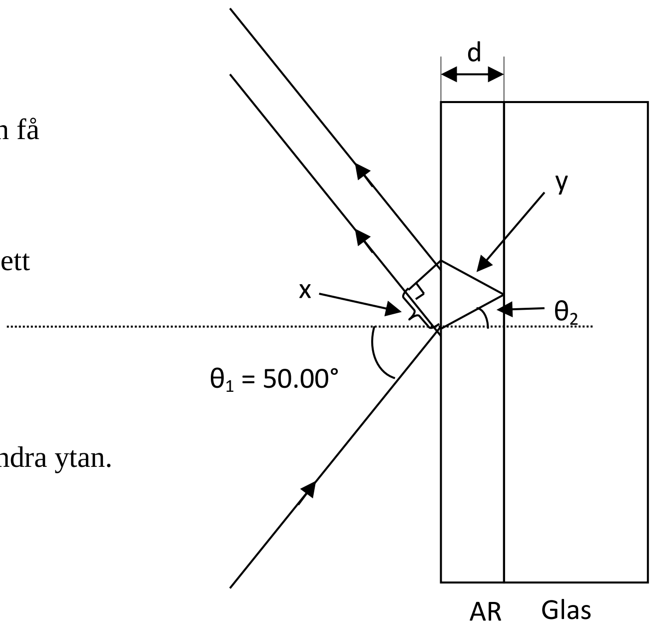
A4. Poyntings vektor ger $E = 3{,}2 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ och B = 10,6 T. Det gäller också $E = c \cdot B$.

Svar: Amplituderna är $= 3{,}2 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ och B = 10,6 T.

A5. Energin i en kondensator, personens egen kondensator, är
$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 10^{-12} \cdot (15 \cdot 10^3)^2 = 28$ mJ.

Svar: Energin låg under gränsvärdet, det var ingen risk för explosion.

B1. Givet: $n_{skikt} = 1.55$



Lösning: Skillnad i optisk färdväg, ΔOPL ges av:

ΔOPL = $2n_{ar}y$-x där x och y definierats i figuren.

För att filtrera bort grönt ljus (λ=540 nm) vill man få konstruktiv interferens i reflektion. Villkoret blir:

ΔOPL + λ/2 = mλ där termen λ/2 tillkommer pga ett fasskifte motsvarande en halv våglängd i första ytan. Brytningsindex för glas vid λ=540 nm är mindre än n_{skikt}=1.55 så inget fasskifte sker i andra ytan.

Tecknar y:

$$\frac{d}{y} = \cos(\theta_2) =\rightarrow y = \frac{d}{\cos(\theta_2)}$$

Tecknar x:

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{2ysin(\theta_2)} \rightarrow x = 2ysin(\theta_2)\sin(\theta_1) = \frac{2dsin(\theta_2)\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}$$

$$\Delta OPL = 2n_{ar}y - x = \frac{2n_{ar}d}{\cos(\theta_2)} - \frac{2dsin(\theta_2)\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}$$

Villkoret för konstruktiv interferens kan nu skrivas:

$$\Delta OPL = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \rightarrow \frac{2n_{ar}d}{\cos(\theta_2)} - \frac{2dsin(\theta_2)\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2)} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Snell's lag ger:

$$\frac{2n_{ar}d}{\cos(\theta_2)} - \frac{2n_{ar}dsin^2(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Med trigonometriska ettan:

$$2n_{ar}d \cdot \cos(\theta_2) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \rightarrow \{m = 0\}\ d = \frac{\lambda}{2 \cdot 2n_{ar} \cdot \cos(\theta_2)}$$

$$\cos(\theta_2) = \{Snell's\ lag\ igen\} = \cos\left(sin^{-1}\left(\frac{sin(\theta_1)}{n_{ar}}\right)\right) \rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \cdot 2n_{ar} \cdot \cos\left(sin^{-1}\left(\frac{sin(\theta_1)}{n_{ar}}\right)\right)} \approx \underline{100\text{ nm}}$$

Svar: Tjockleken på skiktet skall vara ca 100 nm.

B2. Spänningen över spolen efter en timme är approximativt den spänning som ligger över spolen då $t \rightarrow$ oändligheten.
Spänningen över motståndet är 100V – 12V = 88V.

$$I_\infty = \frac{88\,V}{10\Omega} = 8{,}8\,A$$

Spolens resistans kan då beräknas:

$$\frac{12\,V}{8{,}8A} = R_{spole} \quad \rightarrow \quad R_{spole} \approx 1{,}36\,\Omega$$

$$Sätt\ nu\ R = R_{spole} + 10\Omega = 11{,}36\,\Omega$$

Kirchoffs lag II ger:

$$U_L + U_R = U \qquad L\frac{di}{dt} + Ri = U \qquad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L}$$

Inhomogen lösning:

$$i = A \cdot exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + B$$

$$t = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow A = -B$$

$$t = \infty \rightarrow i = 8{,}8A \rightarrow B = 8{,}8A$$

$$i = 8{,}8A \cdot \left(1 - exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$$

Från mätning:

$$t = 10\,ms, U_{spole} = 20V \rightarrow U_{rest} = 80V, \rightarrow i(t = 10\,ms) = 8{,}0\,A$$

$$8{,}0\,A = 8{,}8A \cdot \left(1 - exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)\right)$$

$$8{,}0\,A - 8{,}8A = 0{,}8A = 8{,}8A \cdot exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)$$

$$ln\left(\frac{0{,}8}{8{,}8}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t \qquad \rightarrow \qquad L = \frac{-R \cdot t}{ln\left(\frac{0{,}8}{8{,}8}\right)} = \frac{-11{,}36\,\Omega \cdot 10 \cdot 10^{-3}s}{ln\left(\frac{0{,}8}{8{,}8}\right)} = 0{,}0474\,H$$

$$L \approx 47mH$$

Svar: Spolens resistans är ca $R_{spole} \approx 1{,}4\ \Omega$ och spolens induktans är *L*= 47 mH

B3.a) Impedansen i gren 1: $Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 100 + j126\ \Omega$

Impedansen i gren 2: $Z_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = 200 - j159\ \Omega$

Välj totala spänningen 10 V till riktfas med fasvinkel noll, och Ohms lag ger att

→ Strömmen i gren 1 blir $I_1 = \frac{10}{100+j126} = 0{,}062 \cdot e^{j-51{,}5°}$A

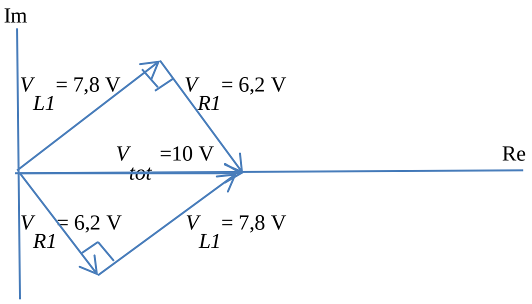
→ Strömmen i gren 2 blir $I_2 = \frac{10}{200-j159} = 0{,}039 \cdot e^{j+38{,}5°}$A

Spänningarna över R_1 och L_1i gren 1 blir

$V_{R_1} = 100 \cdot 0{,}062 \cdot e^{j-51{,}5°}$V = 6,2· $e^{j-51{,}5°}$V och $V_{L_1} = j126 \cdot 0{,}062 \cdot e^{j-51{,}5°} = 7{,}8 \cdot e^{j38{,}5°}$V

$V_{R_2} = 200 \cdot 0{,}039 \cdot e^{j38{,}5°}$V= 7,8· $e^{j38{,}5°}$ och $V_{C_2} = -j159 \cdot 0{,}039 \cdot e^{j38{,}5°} = 6{,}2 \cdot e^{j-51{,}5°}$V

b) I ett diagram med riktade sträckor får man med $V_{tot} = 10$ V som riktfas



För V_{R_2} och V_{C_2} : Byt V_{L_1} mot V_{R_2} och V_{R_1} mot V_{C_2} i diagrammet ovan, det är en tillfällighet att de är lika.

Det gäller att V_{R_1} är vinkelrät mot V_{L_1} och V_{R_2} är vinkelrät mot V_{C_2} .

Summan V_{R_1} + V_{L_1} =10 V och V_{R_2} + V_{C_2} =10 V, vilkes ses i det komplexa diagrammet med riktade sträckor.

Svar: a) $V_{R_1} = 6{,}2$ V, $V_{L_1} = 7{,}8$ V, $V_{R_2} = 7{,}8$ V och $V_{C_2} = 6{,}2$ V. b) Se ovan i diagrammet.

B4. Arean per pixel (antag t ex kvadratisk pixelarea) blir:

$$A = \frac{23{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 15{,}6 \cdot 10^{-3}}{12{,}3 \cdot 10^{6}} = 2{,}98 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^2}{\text{pixel}}$$

Antagandet att pixlarna är kvadratiska ger att sidan blir $a = \sqrt{2{,}98 \cdot 10^{-11}} = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ m

Rayleighvillkoret $\theta = \dfrac{1{,}22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} = 33{,}5 \cdot 10^{-6}$ rad

Det ger möjlig upplösning på sensorn $x = 7 \cdot 10^{-2} \cdot 33{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{rad} = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$ m

$x < a$ medför att det går att lösa upp en pixel.

Svar: Det går att lösa upp en pixel med de förutsättningar som är givna.

B5. a) Gauss sats ger innanför:

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{Q}{K \cdot \varepsilon_0} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \rho}{K \cdot \varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{r \cdot \rho}{2 \cdot K \cdot \cdot \varepsilon_0}$$

Utanför:

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot L \cdot \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot a^2}{2 \cdot r \cdot \cdot \varepsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \left(50 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 70 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \approx 10080\ \text{N/C}$$

a) För r = 5 mm: $E = \dfrac{5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(5 \cdot 10^{-6}\right)}{2 \cdot 2{,}1 \cdot \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}}$ = 672 N/C = 0,7 kN/C riktad inåt cylinderns axel.

För r=70 mm: E = 10 kN/C riktad inåt cylinderns axel.

b) E är linjärt inuti cylindern, och går som 1/r utanför cylindern.

E är diskontinuerligt vid gränsen r = 50 mm, K ändras där från 1 till 2,1.

Svar: Se ovan vid a) och b), E är diskontinuerligt vid gränsen r = 50 mm.