

Lösningförslag till tentamen i Elektricitets-och vågrörelselära för K, Bio och I 090113.

A1=1. Vinkeln kan tecknas på två sätt och Rayleighvillkoret ger

$$U_{tot} = \sum q_i q_j \cdot k \cdot \frac{1}{r_{ij}} = 9 \cdot 10^9 \left[8 \cdot 20 \cdot \frac{1}{5} - 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{3} - 15 \cdot 20 \cdot \frac{1}{4} \right] \cdot 10^{-12} = -0,747 \approx -0,75 \text{ J}$$

Svar: Elektrostatiska energin blir $U_{tot} = -0,75 \text{ J}$.

A2=2. Kretsekv:

Ansatta riktningar:

 I_1 Positiv åt höger i undre grenen I_2 : Positiv åt vänster i mellangrenen I_3 : Positiv åt vänster i övre grenen

Undre loopen, vänster varv: $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - R_1 I_1}{R_2}$ (1)

Övre loopen, höger varv: $\mathcal{E}_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + R_3 I_3}{R_2}$ (2)

Stora loopen vänster varv: $\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 - R_1 I_1}{R_3}$ (3)

Strömekvation, högra noden: $I_1 - I_3 - I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_3 + I_2$ (4)

(1) och (3) i (4) ger: $I_1 = I_3 + I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - R_1 I_1}{R_3} + \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - R_1 I_1}{R_2}$ (5) och I_1 kan bestämmas.

$$I_1 \left[1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2} \right] = \frac{\mathcal{E}_1}{R_3} + \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_2} \Rightarrow I_1 = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{R_3} + \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2 \mathcal{E}_1 + R_3 [\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2]}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3} =$$

$$\frac{200 \cdot 4 + 100 \cdot 5}{200 \cdot 100 + 200 \cdot 300 + 300 \cdot 100} = \frac{13}{1100} = 0,01182 \text{ A}$$

Insättning i (3) ger $I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 - R_1 I_1}{R_3} = \frac{4 - 300 \cdot 0,01182}{100} = 0,00454 \text{ A}$

I_2 kan sedan bestämmas ur (4): $I_2 = I_1 - I_3 = 0,01625 - 0,00454 = 0,00728 \text{ A}$

Svar: $I_1 = 12 \text{ mA}$ åt höger, $I_2 = 7,3 \text{ mA}$ åt vänster, $I_3 = 4,5 \text{ mA}$ åt vänster

A3=3. Dopplersvävning från rörlig källa till och från ger:

Rörelse till: $f_{till} = f \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$ (1) Rörelse från: $f_{från} = f \left(\frac{v}{v + v_s} \right)$ (2)

 v_s är konstant under hela förloppet. $f = 600 \text{ Hz}$, $f_{till} = 650 \text{ Hz}$ och $f_{från} = x$ söks. v_s kan bestämmas ur (1):

$$f_{till} = 600 \cdot \left(\frac{v}{v - v_s} \right) \Rightarrow v_s = \frac{\left[\frac{650}{600} - 1 \right] 340}{\frac{650}{600}}, \text{ vilket ger } v_s = 26,2 \text{ m/s} = 94,2 \text{ km/h}$$

Och $f_{från}$ fås ur (2): $f_{från} = f\left(\frac{v}{v+v_s}\right) = 600\left(\frac{340}{340+26,2}\right) = 557,1 \text{ Hz} \approx 557 \text{ Hz}$

Svar: $f_{från} = 557 \text{ Hz}$.

A4=4. a) Medelintensiteten ges av $S = c\epsilon_0 E^2 = 3 \cdot 10^8 \cdot 8,852 \cdot 10^{-12} \cdot 2800^2 = 20,8 \text{ kW/m}^2$

b) Medeleffekten ges av $P = S \cdot \pi r^2 = 20,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 = 105 \text{ W}$

c) Energin som lagras är $E = P \cdot t = 3500 \cdot m \cdot \Delta(\text{°C}) \Rightarrow t = \frac{3500 \cdot 0,28 \cdot 2}{105} = 18,7 \text{ s}$

Svar: a) Medelintensiteten blev 20,8 kW/m², medeleffekten blev 105 W och tiden blev 18,7 s.

A5=5. Linsformeln ger $\frac{1}{f} = \frac{1}{12} + \frac{1}{-5,2} \Rightarrow f = -9,2 \text{ m}$

Svar: Fokallängden blev $f = -9,2 \text{ m}$, (divergerande lins)

B1=6. Det gäller $E_1 = -\text{grad } V_1 = -\left[\frac{\partial V_1}{\partial x}; \frac{\partial V_1}{\partial y}; \frac{\partial V_1}{\partial z}\right] = -[ay; ax; 0]$ och

$E_2 = -\text{grad } V_2 = -\left[\frac{\partial V_2}{\partial x}; \frac{\partial V_2}{\partial y}; \frac{\partial V_2}{\partial z}\right] = -[bz; -2cy; bx]$

Totala elektriska fältstyrkan blir $E_{tot} = -[ay + bz; ax - 2cy; 0 + bx]$

$= -[5 \cdot 10^6; -26 \cdot 10^6; 1 \cdot 10^6] \text{ N/C} = [-5 \cdot 10^6; +26 \cdot 10^6; -1 \cdot 10^6] \text{ N/C}$

Elektriska kraften är då $F_{tot} = q \cdot E_{tot} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot [-5 \cdot 10^6; +26 \cdot 10^6; -1 \cdot 10^6] \text{ N}$

$= [-10; 52; -2] \text{ N}$, Storleken är $F = \sqrt{10^2 + 52^2 + 2^2} = 53 \text{ N}$

Svar: Kraften är $F_{tot} = [-10; 52; -2] \text{ N}$, med storleken $F = 53 \text{ N}$

B2=7. a) $V_{out} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}} V_{in} = \sqrt{\frac{100^2}{100^2 + (125,6)^2}} 10 \text{ V} = 6,2 \text{ V}$

b) Fasvinkeln är $\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = \tan^{-1} \frac{125,6}{100} = 51,5^\circ$, $\varphi > 0$, induktiv krets

c) $\lim_{\omega \rightarrow 0} V_{out} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}} V_{in} = V_{in} \Rightarrow$ Lågpassfilter

Svar: a) $V_{out} = 6,2 \text{ V}$ b) $\varphi = 51,5^\circ$ c) Lågpassfilter

B3=8. Induktionslagen ger $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{dt} = -\frac{\Delta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{\Delta t}$

Storleksmässigt: $\Delta t = \frac{\Delta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})}{\mathcal{E}} = \frac{2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,032}{0,010} = 5,5 \text{ s}$

Svar: Det minsta tillåtna tidsintervallet är 5,5 s

B4=9. Gitterformeln $a \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$ ger för olika ordningar m

med $a = \frac{1}{3300} \cdot 10^{-2} = 3,03 \cdot 10^{-6}$ och $\lambda = 410 \text{ nm}$ (violett) respektive $\lambda = 660 \text{ nm}$ (röd):

θ

$m = 1$: $7,8^\circ$ (violett) 13° (röd)

$m = 2$ 16° (violett) 26° (röd)

$m = 3$ 24° (violett) 41° (röd)

Man ser att spektrum för $m = 2$ och $m = 3$ överlappar.

Svar: Andra och tredje ordningen överlappar

B5=10. Gauss sats ger med godtycklig längd L och volym-laddningstätheten ρ :

$$\text{Inuti: } \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{Q}{K \cdot \epsilon_0} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \rho}{K \cdot \epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{r \cdot \rho}{2 \cdot K \cdot \epsilon_0}$$

$$\text{Utanför: } \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{r_{10}^2 \cdot \rho}{2 \cdot r \cdot \epsilon_0}$$

$$\text{a) För } r = 5 \text{ cm: } E = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 2,1 \cdot 8,852 \cdot 10^{-12}} = 672 \text{ kN/C}$$

$$\text{b) För } r = 20 \text{ cm: } E = \frac{(10 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 8,852 \cdot 10^{-12}} = 1,4 \text{ MN/C}$$

c) E är riktad radiellt i a) respektive b)

Svar: a) $E = 670 \text{ kN/C}$, b) $E = 1,4 \text{ MN/C}$, c) E är riktad radiellt utåt i a) respektive b)